



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Viktor Szabados

Nové trendy ve stochastickém programování

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Vlasta Kaňková, CSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Pravděpodobnost, matematická statistika
a ekonometrie

Praha 2017

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Název práce: Nové trendy ve stochastickém programování

Autor: Viktor Szabados

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Vlasta Kaňková, CSc., Ústav teorie informace a automatizace AV ČR

Abstrakt: Se stochastickými úlohami se v běžném životě setkáváme v situacích, kdy potřebujeme udělat rozhodnutí na základě neznámého vývoje událostí. V této diplomové práci seznámíme čitatele s přístupy, které se využívají ve stochastických úlohách. V první kapitole zadefinujeme stochastickou úlohu a představíme základní znění úloh, se kterými se můžeme potkat v literatuře. V druhé kapitole popíšeme úlohy, které jsou nelineárně závislé na pravděpodobnostní míře. Taktéž se budeme zabývat metodami v deterministických a nedeterministických vícekritériálních úlohách. V třetí kapitole popíšeme koncept stochastické dominance a budeme se věnovat metodám, které se využívají v úlohách s vícerozměrnou stochastickou dominancí. Ve čtvrté kapitole využijeme znalosti z druhé a třetí kapitoly a pokusíme se vyřešit úlohu optimalizace portfolia na reálných datech pomocí rozličných přístupů.

Klíčová slova: stochastické programování, pravděpodobnostní omezení, vícekritériální programování, stochastická dominance

Title: New Trends in Stochastic Programming

Author: Viktor Szabados

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Vlasta Kaňková, CSc., The Institute of Information Theory and Automation

Abstract: Stochastic methods are present in our daily lives, especially when we need to make a decision based on uncertain events. In this thesis, we present basic approaches used in stochastic tasks. In the first chapter, we define the stochastic problem and introduce basic methods and tasks which are present in the literature. In the second chapter, we present various problems which are non-linearly dependent on the probability measure. Moreover, we introduce deterministic and non-deterministic multicriteria tasks. In the third chapter, we give an insight on the concept of stochastic dominance and we describe the methods that are used in tasks with multidimensional stochastic dominance. In the fourth chapter, we capitalize on the knowledge from chapters two and three and we try to solve the role of portfolio optimization on real data using different approaches.

Keywords: stochastic programming, probability constraints, multi-objective optimization, stochastic dominance

Názov práce: Nové trendy v stochastickom programovaní

Autor: Viktor Szabados

Katedra: Katedra pravdepodobnosti a matematickej štatistiky

Vedúci diplomovej práce: RNDr. Vlasta Kaňková, CSc., Ústav teórie informácie a automatizácie AV ČR

Abstrakt: So stochastickými úlohami sa v bežnom živote stretávame v situáciách, kedy potrebujeme urobiť rozhodnutie na základe neznámeho vývoja udalostí. V tejto diplomovej práci oboznámime čitateľa s prístupmi, ktoré sa využívajú v stochastických úlohách. V prvej kapitole zadefinujeme stochastickú úlohu a predstavíme základné znenia úloh, s ktorými sa môžeme stretnúť v literatúre. V druhej kapitole popíšeme úlohy, ktoré sú nelineárne závislé na pravdepodobnostnej miere. Taktiež sa budeme zaoberať metódami v deterministických a nedeterministických viackriteriálnych úlohách. V tretej kapitole popíšeme koncept stochastickej dominancie a budeme sa venovať metódam, ktoré sa využívajú v úlohách s viacrozmernou stochastickou dominanciou. V štvrtej kapitole využijeme znalosti z druhej a tretej kapitoly a pokúsime sa vyriešiť úlohu optimalizácie portfólia na reálnych dátach využitím rozličných prístupov.

Kľúčové slová: stochastické programovanie, pravdepodobnostné obmedzenia, viackriteriálne programovanie, stochastická dominancia

Chcel by som sa v prvom rade poďakovať RNDr. Vlaste Kaňkovej, CSc. za jej trpezlivosť a profesionálny prístup pri vedení mojej diplomovej práce. Som rád, že som mohol byť pod jej vedením a ďakujem jej za ochotu a čas nájdený na konzultačné hodiny.

Ďalej ďakujem svojej priateľke za neustálu podporu pri písaní diplomovej práce a štylistické opravy.

Nakoniec ďakujem svojej rodine a kamarátom, ktorí mi pomohli s prekladom abstraktu a s gramatikou.

Obsah

Úvod	3
1 Štandardné postupy v stochastickom programovaní	4
1.1 Úloha predavača novín	4
1.2 Dvojstupňové stochastické lineárne programovanie	7
1.3 Viacstupňové stochastické lineárne programovanie	8
1.4 Stochastické programovanie s pravdepodobnostným obmedzením .	10
1.4.1 Individuálne pravdepodobnostné obmedzenie	10
1.4.2 Združené pravdepodobnostné obmedzenie	11
1.5 Kvantifikácia rizika	12
1.6 Koherentné miery rizika	13
2 Nové trendy v stochastickom programovaní	15
2.1 Nelineárna závislosť na pravdepodobnostnej miere	15
2.1.1 Priemerná absolútna odchýlka - MAD	17
2.1.2 Hodnota v riziku - VaR	18
2.1.3 Podmienená hodnota v riziku - CVaR	19
2.2 Viackriteriálne programovanie	20
2.2.1 Skalarizačný proces	21
2.2.2 Metóda epsilonového obmedzenia	22
2.2.3 Metóda cieľového programovania	22
2.2.4 Skalarizačná funkcia s parametrom	23
2.3 Viackriteriálne stochastické programovanie	24
2.4 Využitie strednej hodnoty vo VM	25
2.5 Mean-risk modely	26
3 Stochastická dominancia	28
3.1 Úvod do stochastickej dominancie	28
3.2 Stochastická dominancia v obmedzení	30
3.3 Viacrozmerná stochastická dominancia	31
3.4 Usporiadanie komponentov	32
3.5 Stochastická dominancia v obmedzení vo viacrozmernom prípade .	33
4 Numerické štúdie	35
4.1 Postup pri hľadaní efektívnych riešení	36
4.2 Postup pri úlohe so SD v obmedzení	39
Záver	42
Zoznam použitej literatúry	43
Zoznam obrázkov	45
Zoznam tabuliek	46
Zoznam použitých skratiek	47

Úvod

V živote sa často stretávame so situáciami, v ktorých potrebujeme urobiť rozhodnutie na základe neistoty. Na takýto problém môžeme naraziť pri nákupe produktu s cieľom, aby sme uspokojili dopyt zákazníkov, ktorý dopredu nepoznáme. Taktiež investori odhadujú ako sa budú vyvíjať ceny akcií na trhu. Následne investujú kapitál do určitého portfólia s cieľom maximalizovať výnos alebo minimalizovať riziko alebo na základe vlastných kritérií a preferencií.

S úlohami, v ktorých sa rozhodujeme na základe neistoty, existuje neúrekom veľa. Od polovice 20. storočia sa začali matematici zaoberať týmito problémami a vznikla tým vedná disciplína – stochastické programovanie (ďalej už len SP). Jedna z prvých významných publikácií o SP bola napísaná americkým matematikom George B. Dantzigom už pred 60-timi rokmi viď (Dantzig, 1955).

Za posledné roky sa táto vedná disciplína podrobnejšie skúmala a v súčasnosti existuje mnoho metód, ktoré sa snažia nájsť optimálne riešenie v daných stochastických problémoch. My sa pokúsime tie najzákladnejšie a o trochu rafinovanejšie úlohy spomenúť.

Diplomová práca je štrukturovaná do štyroch kapitol, ktoré sa ďalej rozpadávajú do niekoľkých sekcií prípadne podsekcií.

V prvej kapitole si pripomenieme, s akými problémami sa stretávame v stochastickom programovaní a ako sa s týmito problémami dokážeme vysporiadať. Na úlohe predavača novín si ukážeme základné myšlienky jednotlivých prístupov. Taktiež povieme zopár slov o rizikových mierach a ich koherentných vlastnostiach.

V druhej kapitole sa budeme zaoberať úlohami, ktoré závisia nelineárne na pravdepodobnostnej miere a uvedieme si zopár príkladov. Následne zadefinujeme úlohu viackriteriálneho programovania a oboznámime sa s efektívnymi riešeniami. Zaoberať sa budeme aj viackriteriálnymi stochastickými úlohami a metódami, ktoré v nich môžeme použiť.

V tretej kapitole popíšeme teóriu jednorozmernej stochastickej dominancie a úžitkových funkcií. Teóriu rozšírime o viacrozmernú stochastickú dominanciu a ukážeme, ako sa dá koncept jednorozmernej stochastickej dominancie využiť v tejto problematike. Uvedieme prístup, ako dokážeme nájsť rozumné riešenie pri daných podmienkach v úlohe s viacrozmernou stochastickou dominanciou vyskytujúcou sa v obmedzeniach.

Štvrtá kapitola je venovaná numerickým štúdiám. Budeme sa zaoberať úlohou optimalizáciou portfólia v mean-risk modeloch a v úlohách so stochastickou dominanciou v obmedzeniach.

Diplomová práca je inšpirovaná viacerými prameňmi (prednášky, články alebo knihy). Snažili sme sa dodržiavať značenie v uvedených prameňoch (pokým to situácia dovoľovala) pre zlepšenie konzistentnosti značenia. Text je určený pre čitateľov, ktorí majú základné znalosti z pravdepodobnosti, štatistiky a optimalizácie. Očakáva sa, že čitateľ je oboznámený so základnými postupmi v optimalizačných úlohách a je oboznámený s pojmami ako pravdepodobnostný priestor, distribučná funkcia, kvantilová funkcia a iné.

Prajem príjemné čítanie,

Viktor Szabados

1. Štandardné postupy v stochastickom programovaní

Ako bolo už v úvode spomenuté, stochastické programovanie sa zaoberá optimalizačnými úlohami, v ktorých sa vyskytujú náhodné veličiny (buď v účelovej funkcii alebo v obmedzeniach alebo v oboch zároveň). Obecne by sme mohli úlohu SP definovať nasledovne

$$\text{Max}_{\mathbf{x}} \quad f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}(\omega)) \quad \text{za podmienok (z.p.)} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X}(\boldsymbol{\xi}(\omega)), \quad (1.1)$$

kde $\boldsymbol{\xi} := \boldsymbol{\xi}(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_s(\omega))$ je s -rozmerný náhodný vektor. Zložky $\xi_i(\omega) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sú náhodné veličiny z pravdepodobnostného priestoru (Ω, \mathcal{A}, P) . Nech $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ je reálna funkcia definovaná na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$ a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je rozhodovací vektor. Množinu prípustných riešení závislých na náhodnej zložke značíme $\mathcal{X}(\boldsymbol{\xi}(\omega))$.

Všimnime si, že $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\omega)$ je jednoznačne určené scenárom ω . Pre viacero výskytov ω v modeli (napr. vo viackriteriálnom stochastickom programovaní) môže byť priradené rovnaké $\boldsymbol{\xi}$. Preto zápis $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}(\omega))$ budeme jednoduchšie zapisovať v diplomovej práci ako $f(\mathbf{x}, \omega)$. Taktiež v nasledujúcich sekciách budeme o f hovoriť aj ako o náhodnej reálnej veličine, ktorá ku každému scenáru $\omega \in \Omega$ priraďuje hodnotu $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}(\omega))$.

Otázkou zostáva ako dokážeme riešiť úlohy SP. Uvedieme jednu zo základných formulácií úloh SP, v ktorej budea v účelovej funkcii. Množinu prípustných riešení, ktorá nezávisí nme maximalizovať zisk. Budeme predpokladať, že náhoda sa vyskytuje iba náhodnej zložke, budeme označovať \mathcal{X} . Jeden z najjednoduchších prístupov, ktorý sa využíva je maximalizovať „očakávaný“ zisk

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \mathbb{E}_P f(\mathbf{x}, \omega) \\ \text{z.p.} \quad & \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

kde \mathbb{E}_P označuje strednú hodnotu viazanú k náhodnej veličine $\omega \in \Omega$ vzhľadom k pravdepodobnostnému rozdeleniu P . Motiváciou tohto postupu je, že ak by sme úlohu zopakovali niekoľkokrát, tak zo zákona veľkých čísel pre pevné prípustné riešenie \mathbf{x} by jeho priemerný zisk konvergoval k strednej hodnote.

Najčastejšou motivačnou úlohou v literatúrach na tento typ úlohy je úloha predavača novín (The Newsboy problem) viď napríklad (Shapiro a kol., 2014, sekcia 1.2.1). My si túto úlohu formulujeme v zjednodušenej verzii a ukážeme si na nej rôzne techniky, ktoré využívame v úlohách SP.

1.1 Úloha predavača novín

Predavač novín (kamelot) sa každý deň rozhoduje, koľko novín x má objednať, aby na ďalší deň naplnil dopyt po novinách, ktorý dopredu nepozná. Kamelot nakupuje noviny (za jeden kus) za cenu $p > 0$ a predáva ich za cenu $c > 0$. Predavač sa snaží maximalizovať svoj zisk a v prípade, ak mu na konci dňa nejaké noviny zvyšia, tak ich vyhodí.

V tejto úlohe budeme na dopyt po novinách pozeráť ako na náhodnú veličinu ω . Predpokladajme, že z dlhoročného predaja novín **poznáme pravdepodobnostné rozdelenie** ω (označme P). Potom môžeme našu úlohu formulovať

$$\max_{x \geq 0} (c - p)x - c \mathbb{E}_P(x - \omega)^+, \quad (1.3)$$

kde predpokladáme, že $c > p > 0$, \mathbb{E}_P označuje strednú hodnotu viazanú k nezápornej náhodnej veličine ω s vzhľadom k známemu pravdepodobnostnému rozdeleniu P . Výraz $(\cdot)^+ = \max\{0, \cdot\}$.

Poznámka. Predpoklad $p < c$ je prirodzený, lebo inak by bol kamelot neziskový a neoplatilo by sa mu predávať noviny.

V uvedenej úlohe (1.3) sa snažíme optimalizovať (maximalizovať) zisk vzhľadom k strednej hodnote. Hľadáme také rozhodnutie (x), že ak by sme úlohu opakovali niekoľkokrát, tak v priemere získaný zisk by bol čo najväčší. Keďže účelová funkcia je konkávna, tak v prípade, že ω pochádza z absolútne spojitého rozdelenia s hustotou \tilde{p} a distribučnou funkciou F , potom stredná hodnota je rovná

$$\mathbb{E}_P(x - \omega)^+ = \int_{\Omega} (x - \omega)^+ \tilde{p}(\omega) d\omega \stackrel{(*)}{=} \int_0^x (x - \omega) \tilde{p}(\omega) d\omega, \quad (1.4)$$

kde rovnosť $(*)$ platí z predpokladu o nezápornosti náhodného dopytu ω . Derivácia strednej hodnoty je rovná

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \mathbb{E}_P(x - \omega)^+ &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x (x - \omega) \tilde{p}(\omega) d\omega \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^x x \tilde{p}(\omega) d\omega - \int_0^x \omega \tilde{p}(\omega) d\omega \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (xF(x)) - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x \omega \tilde{p}(\omega) d\omega \\ &\stackrel{(*)}{=} F(x) + x\tilde{p}(x) - x\tilde{p}(x) = F(x), \end{aligned} \quad (1.5)$$

kde v rovnosti $(*)$ sme využili, že $\frac{\partial}{\partial x} \int_0^x \omega \tilde{p}(\omega) d\omega = x\tilde{p}(x)$. Stačí použiť metódu „per partes“ a základné vedomosti o integrálnom počte.

Štandardným derivovaním účelovej funkcie v úlohe (1.3) a položením nule dostaneme riešenie úlohy

$$F(x) = \frac{c - p}{c} \Rightarrow x = F^{-1}(1 - \alpha),$$

kde $\alpha = p/c$ a F (respektíve F^{-1}) je distribučná (resp. kvantilová) funkcia rozdelenia ω .

Zvyčajne v praxi **nepoznáme pravdepodobnostné rozdelenie** P náhodnej veličiny ω . Predpokladajme, že máme napozorovaných N nezávislých rovnako rozdelených realizácií náhodnej veličiny ω . Označme ich ako $\omega^1, \dots, \omega^N$. V tomto prípade si predavač novín môže narátať **empirickú distribučnú funkciu** (označme P^N) ako aproximáciu neznámeho rozdelenia P . Rozhodnutie predavača novín môžeme potom dostať riešením nasledujúcej úlohy

$$\arg \max_{x \geq 0} (c - p)x - \frac{c}{N} \sum_{i=1}^N (x - \omega^i)^+ \quad (1.6)$$

s optimálnym riešením x_{PN} , čo symbolizuje $100(1 - \alpha)\%$ kvantil empirického rozdelenia P^N .

Občas o rozdelení P vieme, že patrí do nejakej špecifickej triedy pravdepodobnostných rozdelení označme \mathcal{P} (napríklad ak poznáme momenty P). Potom môžeme za pomoci **minimaxového prístupu** ohraničiť optimálnu hodnotu účelovej funkcie v úlohe (1.3) nasledujúcimi hodnotami

$$\begin{aligned} L(\mathcal{P}) &= \max_{x \geq 0} \min_{P \in \mathcal{P}} (c - p)x - c \mathbf{E}_P(x - \omega)^+ \quad \text{v najhoršom prípade} \\ U(\mathcal{P}) &= \max_{x \geq 0} \max_{P \in \mathcal{P}} (c - p)x - c \mathbf{E}_P(x - \omega)^+ \quad \text{v najlepšom prípade} \end{aligned}$$

Tým pádom dostávame ohraničenie optimálnej hodnoty ako

$$L(\mathcal{P}) \leq \max_{x \geq 0} (c - p)x - c \mathbf{E}_P(x - \omega)^+ \leq U(\mathcal{P}) \quad \forall P \in \mathcal{P}. \quad (1.7)$$

Po napočítaní krajných hodnôt bude mať predajca predstavu o tom, v akom rozpätí sa bude jeho zisk pohybovať. V prípade, že interval medzi $L(\mathcal{P})$ a $U(\mathcal{P})$ bude príliš veľký, potom sa odporúča predajcovi novín zozbierať dodatočné informácie o neznámom rozdelení P .

Poznámka. Ak nemáme žiadnu informáciu o dopyte ω , tak z logiky veci je najhorší možný dopyt rovný 0, čo by znamenalo, že kamelot ostane doma.

Predavač novín sa môže riadiť aj iným modelom napr. modelom s **pravdepodobnostným obmedzením**

$$\begin{aligned} \text{Max}_{x \geq 0} \quad & (c - p)x \\ \text{z.p.} \quad & P(x \leq \omega) \geq 1 - \varepsilon, \varepsilon \in [0, 1] \end{aligned} \quad (1.8)$$

Obmedzenie vo vyššie uvedenej úlohe dokážeme prepísať ako $F(x) \leq \varepsilon$. Pri známom rozdelení P je potom optimálna hodnota x_P rovná $100\varepsilon\%$ kvantilu rozdelenia P . Stochastické programovanie s pravdepodobnostným obmedzením podrobnejšie popíšeme v sekcii 1.4.

Ak by sme dovolili predavačovi dodatočne doobjednať noviny počas dňa (na obed o 12:00), ale už pri známom dopyte po novinách na celý deň, tak dostávame **dvojstupňovú úlohu SP**. Kamelot robí prvú objednávku novín pri neznámom dopyte (1. stupeň) a na základe vývoju predaja novín počas dňa robí dodatočnú objednávku (2. stupeň). Viac o dvojstupňovom stochastickom programovaní sa čitateľ dozvie v nasledujúcej sekcii.

1.2 Dvojstupňové stochastické lineárne programovanie

V tejto sekcii budeme diskutovať, ako dokážeme vyriešiť optimalizačný lineárny problém s nejakou neurčitostou v modeli pomocou dvojstupňového stochastického programovania. Základnou myšlienkou tejto metódy je čo najoptimálnejšie sa rozhodnúť v danom momente na základe dát, ktoré máme v súčasnosti k dispozícii. Tento problém sa definuje nasledovne (**1. stupeň**):

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + \mathbb{E}[Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})] \\ \text{z.p.} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

kde $Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ je optimálna hodnota problému (**2. stupeň**):

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m} \quad & \mathbf{q}^\top \mathbf{y} \\ \text{z.p.} \quad & \mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{W}\mathbf{y} = \mathbf{h}, \mathbf{y} \geq 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

V 1. stupni robíme rozhodnutie na základe neistoty $\boldsymbol{\xi}$, kde $\boldsymbol{\xi} := (\mathbf{q}, \mathbf{h}, \mathbf{T}, \mathbf{W})$ sú dáta pre druhý stupeň, kde niektoré zložky $\boldsymbol{\xi}$ sú náhodné (môžu byť všetky). Stredná hodnota v úlohe (1.9) je braná vzhľadom k pravdepodobnostnému rozdeleniu $\boldsymbol{\xi}$. Predpokladajme, že náhodný vektor $\boldsymbol{\xi}_s = (\mathbf{q}_s, \mathbf{h}_s, \mathbf{T}_s, \mathbf{W}_s)$ má konečný počet realizácií (**scenáre**) s príslušnými pravdepodobnosťami p_1, \dots, p_K . Tým pádom strednú hodnotu môžeme zapísať v tvare

$$\mathbb{E}[Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})] = \sum_{k=1}^K p_k Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_k) \quad (1.11)$$

Pre dané \mathbf{x} je potom stredná hodnota rovná optimálnej hodnote lineárneho problému

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_K} \quad & \sum_{k=1}^K p_k \mathbf{q}_k^\top \mathbf{y}_k \\ \text{z.p.} \quad & \mathbf{T}_k \mathbf{x} + \mathbf{W}_k \mathbf{y}_k = \mathbf{h}_k, \quad k = 1, \dots, K \\ & \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_K \geq 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Potom dvojstupňovú stochastickú úlohu lineárneho programovania môžeme prepísať do tvaru:

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_K} \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + \sum_{k=1}^K p_k \mathbf{q}_k^\top \mathbf{y}_k \\ \text{z.p.} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{T}_k \mathbf{x} + \mathbf{W}_k \mathbf{y}_k = \mathbf{h}_k, \quad k = 1, \dots, K \\ & \mathbf{x} \geq 0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_K \geq 0. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Viac o vlastnostiach a prípustnosti optimálneho riešenia úlohy v dvojstupňovom stochastickom lineárnom programovaní sa môže čitateľ dočítať v knihe (Shapiro a kol., 2014, podsekcia 2.1.2).

1.3 Viacstupňové stochastické lineárne programovanie

Existuje viacero spôsobov ako sa dá zadať úloha viacstupňového stochastického programovania. Pre jednoduchšiu predstavu sa budeme v tejto sekcii zaoberať viacstupňovým stochastickým lineárnym programovaním v špecifickom prípade. Skôr ako začneme, tak zavedme značenie. Nech x_1, \dots, x_T sú „rozhodovacie“ vektory korešpondujúce k jednotlivým stupňom $1, \dots, T$. Nech c_1, \dots, c_T sú vektory, ktoré symbolizujú náklady za rozhodnutie v danom stupni. Pre krajšiu vizualizáciu textu nebudeme v tejto sekcii matice a vektory znázorňovať tučným písmom. Uvažujme nasledujúci lineárny problém

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & c_1^\top x_1 + c_2^\top x_2 + c_3^\top x_3 + \dots + c_T^\top x_T \\
 \text{z.p.} \quad & A_1 x_1 = b_1, \\
 & B_2 x_1 + A_2 x_2 = b_2, \\
 & B_3 x_2 + A_3 x_3 = b_3, \\
 & \ddots \\
 & B_T x_{T-1} + A_T x_T = b_T, \\
 & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad \dots \quad x_T \geq 0.
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

Postup pre nájdenie optimálnych riešení a aj v akom zmysle minimalizujeme účelovú funkciu uvedieme neskôr. Poznamenajme, že vektory a matice c_1, A_1 a b_1 sú dopredu známe. Niektoré (alebo všetky) vektory c_t , matice B_t a A_t a vektor pravých strán b_t pre $t = 2, \dots, T$ sú náhodné. V takejto úlohe spravíme v **1. stupni** nejaké rozhodnutie x_1 . Potom napozorujeme vývoj neznámych veličín $\xi_2 := (c_2, B_2, A_2, b_2)$. Na základe tejto dodatočnej informácie robíme v **2. stupni** rozhodnutie x_2 . Takto pokračujeme ďalej až v poslednom **T. stupni** urobíme rozhodnutie x_T na základe informácie $\xi_T := (c_T, B_T, A_T, b_T)$. Systematicky sa tento proces dá znázorniť nasledovne

$$\begin{aligned}
 & \text{napozorované } \xi_1 := (c_1, A_1, b_1) \\
 & \text{rozhodnutie } (x_1) \\
 & \text{pozorovanie } \xi_2 := (c_2, B_2, A_2, b_2) \\
 & \text{rozhodnutie } (x_2) \\
 & \text{pozorovanie } \xi_3 := (c_3, B_3, A_3, b_3) \\
 & \vdots \\
 & \text{pozorovanie } \xi_T := (c_T, B_T, A_T, b_T) \\
 & \text{rozhodnutie } (x_T)
 \end{aligned}$$

Našou úlohou je minimalizovať celkové náklady, ktoré sú vynaložené na rozhodnutia v každom stupni, pričom sa riadime schémou uvedenou vyššie. Dopredu teda nepoznáme, aké podmienky musia naše rozhodnutia spĺňať v každom stupni.

Dôležitou podmienkou v takomto viacstupňovom rozhodovacom procese je **kauzalita** t.j. rozhodnutia, ktoré robíme, nezávisia na budúcich realizáciách náhodných zložiek. To znamená, že v každom stupni sa rozhodujeme iba na základe rozhodnutí, ktoré sme dovtedy urobili a na základe už známych realizácií

náhodných zložiek do daného stupňa (**označme** $\xi_{[t]}$). V angličtine sa takémuto rozhodovaciemu procesu respektíve podmienke hovorí *nonanticipative*.

Existuje viacero rôznych spôsobov ako dokážeme viacstupňové stochastické programovanie matematicky korektne sformulovať. My si ukážeme spôsob založený na **dynamickom programovaní**. V danom stupni sa môžeme pozerať na rozhodnutie $\mathbf{x}_t = x_t(\xi_{[t]})$, $t = 2, \dots, T$, ako na funkciu $\xi_{[t]}$.

Pozrime sa na náš problém z perspektívy z posledného stupňa T . V poslednom stupni poznáme realizáciu všetkých náhodných zložiek $\xi_{[t]}$, a taktiež rozhodnutia x_1, \dots, x_{T-1} , ktoré sme zvolili. Riešime tým pádom jednoduchý lineárny problém

$$\begin{aligned} \text{Min}_{x_T} \quad & c_T^\top x_T \\ \text{z.p.} \quad & B_T x_{T-1} + A_T x_T = b_T, \\ & x_T \geq 0. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Optimálna hodnota závisí na predošlom rozhodnutí $x_{T-1} \in \mathbb{R}^{n_{T-1}}$ a na dátach $\xi_T = (c_T, B_T, A_T, b_T)$. Optimálnu hodnotu budeme označovať ako $Q_T(x_{T-1}, \xi_T)$. Obecné v stupni $t = 2, \dots, T-1$ riešime stochastický problém

$$\begin{aligned} \text{Min}_{x_t} \quad & c_t^\top x_t + \mathbf{E}[Q_{t+1}(x_t, \xi_{[t+1]}) | \xi_{[t]}] \\ \text{z.p.} \quad & B_t x_{t-1} + A_t x_t = b_t, \\ & x_t \geq 0. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Stredné hodnoty sú brané vzhľadom k náhodnej zložke v danom stupni. Optimálna hodnota závisí na $x_{t-1} \in \mathbb{R}^{n_{t-1}}$ a $\xi_{[t]}$ a označujeme ju ako $Q_t(x_{t-1}, \xi_{[t]})$. V 1. stupni potrebujeme nájsť rozhodnutie $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$

$$\begin{aligned} \text{Min}_{x_1} \quad & c_1^\top x_1 + \mathbf{E}[Q_2(x_1, \xi_2)] \\ \text{z.p.} \quad & A_1 x_1 = b_1, \\ & x_1 \geq 0. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Optimálne riešenie tejto úlohy je zároveň aj optimálnym riešením vo viacstupňovom lineárnom programovaní. Poznamenajme, že dáta ξ_1 nie sú náhodné, a preto $Q_2(x_1, \xi_2)$ nezávisí na ξ_1 . Všimnime si taktiež, že pre $T = 2$ korešponduje úloha s úlohou dvojstupňového lineárneho programovania (1.9). Rovnica dynamického programovania vyzerá nasledovne

$$\begin{aligned} Q_t(x_{t-1}, \xi_{[t]}) &= \inf_{x_t} \{c_t^\top x_t + Q_{t+1}(x_t, \xi_{[t+1]}) : B_t x_{t-1} + A_t x_t = b_t, x_t \geq 0\}, \text{ kde} \\ Q_{t+1}(x_t, \xi_{[t+1]}) &:= \mathbf{E}\{Q_{t+1}(x_t, \xi_{[t+1]}) | \xi_{[t]}\}. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Rozhodnutia $\bar{x}_t(\xi_{[t]})$ pre $t = 1, \dots, T$ sú optimálne ak platí pre skoro všetky realizácie náhodného procesu podmienka

$$\bar{x}_t(\xi_{[t]}) \in \arg \min_{x_t} \{c_t^\top x_t + Q_{t+1}(x_t, \xi_{[t+1]}) : A_t x_t = b_t - B_t \bar{x}_{t-1}(\xi_{[t-1]}), x_t \geq 0\}, \tag{1.19}$$

Pre úplnosť doplníme, že pre $t = 1$ je člen $B_t \bar{x}_{t-1}$ vynechaný a pre $t = T$ je vynechaný člen Q_{T+1} . Ak by bol proces ξ_t markovský, tak by optimálna hodnota závisela len na ξ_t a mohli by sme písať $Q_t(x_{t-1}, \xi_t)$, $t = 2, \dots, T$. Ak by bol proces navyše stupňovo nezávislý, tak funkcia Q_t by nezávisela na realizáciách náhodného procesu a mohli by sme písať $Q_t(x_{t-1})$. Viac o viacstupňovom stochastickom lineárnom programovaní sa môže čitateľ dočítať v knihe (Shapiro a kol., 2014, podsekcia 3.1.2) alebo v diplomovej práci (Lapšanská, 2014).

1.4 Stochastické programovanie s pravdepodobnostným obmedzením

Predpokladajme, že $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ sú konkávne funkcie. Nech $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ je uzatvorená neprázdna konvexná množina. Označme $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_m)$. V tejto sekcii sa budeme zaoberať úlohou, v ktorej sa náhodný element vyskytuje iba v obmedzeniach.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \tilde{f}(\mathbf{x}) \\ \text{z.p.} \quad & \text{"}\mathbf{g}(\mathbf{x}, \omega) \geq \mathbf{0}\text{"}, \\ & \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \end{aligned} \tag{1.20}$$

pričom úvodzovky v obmedzujúcej podmienke označujú výskyt náhodnej zložky ω a otázku, ako korektne kvantifikovať túto náhodnosť. Existuje viacero spôsobov, ako môžeme k danému obmedzeniu pristupovať. Môžeme uvažovať napríklad

1. **Permanentne prípustné riešenie:**

$$\tilde{\mathcal{X}} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} : \mathbf{P}(\mathbf{g}(\mathbf{x}, \omega) \geq \mathbf{0}) = 1\}$$

2. **Individuálne pravdepodobnostné obmedzenie:**

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(\alpha_i) &= \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} : \mathbf{P}(g_i(\mathbf{x}, \omega) \geq 0) \geq \alpha_i\}, \quad i = 1, \dots, m \text{ a } \alpha_i \in [0, 1] \\ \mathcal{X}(\alpha) &= \bigcap_{i=1}^m \mathcal{X}(\alpha_i) \end{aligned}$$

3. **Združené pravdepodobnostné obmedzenie:**

$$\mathcal{X}(\alpha) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} : \mathbf{P}(g_i(\mathbf{x}, \omega) \geq 0, i = 1, \dots, m) \geq \alpha\} \quad \alpha \in [0, 1]$$

Poznámka. Permanentne prístupné riešenie je zvyčajne málokedy dosiahnuteľné. V prípadoch, kedy dokážeme také riešenie nájsť, tak zvyčajne je veľmi „drahé“ t.j. hodnota účelovej funkcie je príliš malá. Preto sa hlavne budeme zaoberať ďalšími dvomi spôsobmi. Hodnoty α_i sa volia podľa charakteru problému. V prípade voľnosti voľby ich volíme tak, aby množina prípustných riešení bola dostatočne veľká. To však neplatí v situáciách, kedy je nutné mať splnené podmienky s vysokou pravdepodobnosťou. Napríklad pri konštrukcii lietadla alebo v medicíne. Nedá sa preto jednoznačne povedať, aké hodnoty α_i voliť.

Prirodzenou otázkou pre každý optimalizačný model je konvexita množiny prípustných riešení rovnako ako spojitosť a diferencovateľnosť obmedzujúcich funkcií. V nasledujúcich podsekciiach sa budeme hlavne zaoberať podmienkami pre konvexnosť v úlohách s individuálnymi a združenými pravdepodobnostnými obmedzeniami.

1.4.1 Individuálne pravdepodobnostné obmedzenie

Výhodou tohto prístupu je, že si vieme jednotlivé obmedzenia zoradiť podľa dôležitosti a podľa toho volíme aj príslušné α_i . Dodatočne predpokladajme tzv. separovateľnosť $g_i(\mathbf{x}, \omega) = g_i(\mathbf{x}) - \omega_i$ pre $i = 1 \dots m$. Potom platí

Veta 1. Nech $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sú kvázi-konkávne a separovateľné funkcie. Potom množina $\mathcal{X}(\alpha_i) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} : \mathbf{P}(g_i(\mathbf{x}) \geq \omega_i) \geq \alpha_i\}$ je konvexná pre ľubovoľné $\alpha_i \in [0, 1]$ a rozdelenie ω .

Dôkaz. Dôkaz je uvedený v knihe (Dupačová, 1986, Veta 5).

□

Dôsledok. $\mathcal{X}(\alpha) = \bigcap_{i=1}^m \mathcal{X}(\alpha_i)$ je konvexná množina.

Poznámka. Podmienka separovateľnosti vo vete patrí veľmi k silným predpokladom a v praxi nemusí vôbec platiť.

1.4.2 Združené pravdepodobnostné obmedzenie

Výhodou tohto prístupu je, že má praktickejšie využitie. Dôležitú rolu pri určení podmienok, ktoré zaručujú konvexnosť prípustnej množiny, hrajú tzv. log-konkávne funkcie. Nasledujúce definície sú prevzaté z knihy (Dupačová, 1986).

Definícia 1. Nech P je pravdepodobnostná miera definovaná na priestore $(\mathbb{R}^\ell, \mathcal{B}^\ell)$. Hovoríme, že P je **logaritmicko-konkávna** alebo **log-konkávna** ak pre ľubovoľné dve konverzné množiny $A, B \in \mathcal{B}^\ell$ a $\lambda \in [0, 1]$ platí

$$P\{\lambda A + (1 - \lambda)B\} \geq P(A)^\lambda P(B)^{1-\lambda}.$$

Funkcia $h : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ je **log-konkávna** ak $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^\ell$ platí

$$h\{\lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_2\} \geq h(\mathbf{x}_1)^\lambda h(\mathbf{x}_2)^{1-\lambda}.$$

Veta 2. Nech P je absolútne spojitá log-konkávna pravdepodobnostná miera na $(\mathbb{R}^\ell, \mathcal{B}^\ell)$ s hustotou p . Nech $D \in \mathcal{B}^\ell$ je konverzná. Potom $h(\mathbf{x}) = P(D + \mathbf{x}) = \int_{D+\mathbf{x}} p(z)dz$ je log-konkávna funkcia $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^\ell$.

Dôkaz. Nech $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^\ell$ a $\lambda \in [0, 1]$. Položme $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_2$, potom platí $h\{\lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_2\} = h(\mathbf{x}) = P(D + \mathbf{x}) = P\{\lambda(D + \mathbf{x}_1) + (1 - \lambda)(D + \mathbf{x}_2)\} \geq P(D + \mathbf{x}_1)^\lambda P(D + \mathbf{x}_2)^{1-\lambda} = h(\mathbf{x}_1)^\lambda h(\mathbf{x}_2)^{1-\lambda}$. □

Dôsledok. Ak sú splnené predpoklady predošlej vety, tak potom aj hustota aj distribučná funkcia sú log-konkávne funkcie viď (Dupačová, 1986, Sekcia 4.3).

Medzi známe **log-konkávne rozdelenia** patria

- mnohorozmerné normálne rozdelenie
- beta rozdelenie
- gama rozdelenie
- Dirichletovo rozdelenie
- Wishartovo rozdelenie

Veta 3. (Prékopova veta)

Nech $g_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}), i = 1 \dots m$ sú konkávne na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\ell$. Nech ω má log-konkávne rozdelenie na $(\mathbb{R}^\ell, \mathcal{B}^\ell)$. Potom funkcia $h(\mathbf{x}) = P\{g_i(\mathbf{x}, \omega) \geq 0, i = 1, \dots, m\}$ je log-konkávna funkcia na \mathbb{R}^n .

Dôkaz. Platnosť vety je dokázaná v článku (Prékopa, 1971). □

Dôsledok. Za splnených predpokladov Prékopovej vety je množina $\mathcal{X}(\alpha) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} : h(\mathbf{x}) \geq \alpha\} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} : P(g_i(\mathbf{x}, \omega) \geq 0, i = 1, \dots, m) \geq \alpha\}$ konvexná.

Teória o log-konkávnych funkciách a rozdelení sa postupom času rozširovala a zovšeobecnila sa na triedu α -konkávnych rozdelení.

Definícia 2. Nech P je pravdepodobnostná miera definovaná na priestore $(\mathbb{R}^\ell, \mathcal{B}^\ell)$. Hovoríme, že P je **α -konkávna** ak pre ľubovoľné dve konvexné množiny $A, B \in \mathcal{B}^\ell$ a $\lambda \in [0, 1]$ platí

$$P\{\lambda A + (1 - \lambda)B\} \geq m_\alpha(P(A), P(B), \lambda),$$

kde $m_\alpha : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ je definované nasledovne:

$$m_\alpha(a, b, \alpha) = 0 \quad \text{ak} \quad ab = 0,$$

a pre $a > 0, b > 0, 0 \leq \lambda \leq 1$

$$m_\alpha(a, b, \lambda) = \begin{cases} a^\lambda b^{1-\lambda}, & \text{pre } \alpha = 0, \\ \max\{a, b\}, & \text{pre } \alpha = \infty, \\ \min\{a, b\}, & \text{pre } \alpha = -\infty, \\ (\lambda a^\alpha + (1 - \lambda)b^\alpha)^{1/\alpha} & \text{inak.} \end{cases}$$

Z definície vidíme, že pre voľbu $\alpha = 0$ dostávame definíciu pre log-konkávnu pravdepodobnostnú mieru P .

Definícia 3. Hovoríme, že náhodný vektor \mathbf{Z} s hodnotami v \mathbb{R}^ℓ má α -konkávne rozdelenie ak pravdepodobnostná miera $P_{\mathbf{Z}}$ indukovaná s \mathbf{Z} na \mathbb{R}^ℓ je α -konkávna.

Veta 4. Ak náhodný vektor \mathbf{Z} má α -konkávne rozdelenie na \mathbb{R}^ℓ , potom kumulatívna distribučná funkcia $F_{\mathbf{Z}}$ je α -konkávna.

Dôkaz. Platnosť vety je dokázaná v knihe (Shapiro a kol., 2014, Lemma 4.12). \square

Viac o log-konkávnych funkciách, respektíveobecne o generujúcich konkávnych funkciách a ich vlastnostiach sa môže zvedavý čitateľ dočítať napríklad v knihe (Shapiro a kol., 2014, sekcia 4.2).

1.5 Kvantifikácia rizika

Jedným z dôležitých faktorov, ktorý berieme do úvahy pri investovaní peňazí do akcií je volatilita (kolísavosť) výnosu/straty. Takýmto problémom sa zaoberajú „mean-risk“ modely. Ak je riziko merané rozptylom, tak najznámejší investičný model pre voľbu optimálneho portfólia je **Markowitzov model** vid' (Markowitz, 1952).

Uvažujme n aktív s náhodnými výnosmi $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \dots, \rho_n)^\top$. Očakávaný výnos portfólia označme ako $\mathbf{E}\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}$ a riziko portfólia je reprezentované variančnou maticou $\text{var } \boldsymbol{\rho} = \mathbf{V}$. Potom Markowitzov model zapisujeme nasledovne

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}} \quad & \lambda \mathbf{r}^\top \mathbf{x} - \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{V} \mathbf{x} \\ \text{z.p.} \quad & \mathbf{1}^\top \mathbf{x} = 1, \mathbf{x} \geq 0, \end{aligned} \tag{1.21}$$

kde parameter $\lambda \geq 0$ modeluje vzťah investora k riziku. Kritikou tohto modelu je, že riziko je reprezentované kovariančnou maticou, ktorá je symetrická. Preto sa hľadali ďalšie miery rizika, ktoré už túto nevýhodu nemajú.

Nech X reprezentuje náhodnú stratu definovanú na merateľnom priestore (Ω, \mathcal{A}) . V nasledujúcej tabuľke uvádzame jedny z mnohých obľúbených rizikových mier, ktoré sa používajú.

Rizikové miery	Označenie	Vzorec
Rozptyl	var	$\text{var}(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E} X)^2$
Smerodajná odchýlka	sd	$\text{sd}(X) = [\mathbb{E}(X - \mathbb{E} X)^2]^{1/2}$
Semi-variancia	sv	$\text{sv}(X) = \mathbb{E}[\max(0, X - \mathbb{E} X)^2]$
Value at Risk	VaR	$\text{VaR}_\alpha(X) = \min\{x \in \mathbb{R} : P[X \leq x] \geq \alpha\}$
Podmienový VaR*	CVaR	$\text{CVaR}_\alpha(X) = \min_{a \in \mathbb{R}} \left\{ a + \frac{1}{1-\alpha} \mathbb{E}[X - a]^+ \right\}$

Pozn.: * Vzorec pre CVaR bol prvýkrát uvedený v článku Rockafeller a Uryasev (2002).

Tabuľka 1.1: Rizikové miery.

Podotknime, že parameter α , pri rizikových mierach VaR a CVaR, berieme z otvoreného intervalu $(0, 1)$. V nasledujúcej sekcii si ukážeme aké vlastnosti majú uvedené rizikové miery.

1.6 Koherentné miery rizika

Ako bolo už spomenuté, investor sa pri rozhodovaní, do akých akcií chce investovať svoje peniaze, môže rozhodovať vzhľadom k iným rizikovým mieram. Prirodzená otázka, ktorá sa nám ponúka je: Aká je ideálna riziková miera? Matematici sa zaoberali touto otázkou a v roku 1999 definovali axiómy, ktoré určujú aké vlastnosti by mala mať ideálna tzv. **koherentná miera rizika** vid' (Artzner a kol., 1999).

Definícia 4. Uvažujme množinu V reálnych náhodných veličín. Nech X, Y reprezentujú náhodné straty definované na merateľnom priestore (Ω, \mathcal{A}) . Funkciu $\rho : V \rightarrow \mathbb{R}$ nazývame koherentnou mierou rizika ak spĺňa:

$$A1 \text{ (Monotónnosť)} \quad X, Y \in V, Y(\omega) \geq X(\omega), \forall \omega \in \Omega \Rightarrow \rho(Y) \geq \rho(X).$$

$$A2 \text{ (Sub-aditivita)} \quad X, Y, X + Y \in V, \Rightarrow \rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y).$$

$$A3 \text{ (Pozitívna homogenita)} \quad X \in V, h > 0, hX \in V \Rightarrow \rho(hX) = h\rho(X).$$

$$A4 \text{ (Translačná ekvivarencia)} \quad X \in V, a \in \mathbb{R} \Rightarrow \rho(X + a) = \rho(X) + a.$$

Axióm monotónie môže byť nahradený predpokladom

$$A1b \text{ (Pozitivita)} \quad X \in V, X(\omega) \geq 0, \forall \omega \in \Omega \Rightarrow \rho(X) \geq 0.$$

Sub-aditivita spolu s homogenitou implikujú

$$A5 \text{ (Konvexnosť)}$$

$$X, Y \in V, \lambda \in [0, 1] \Rightarrow \rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y).$$

V tabuľke 1.2 si zhrnieme koherentné vlastnosti rizikových mier, ktoré boli uvedené v tabuľke 1.1. Symbol ✓ označuje vlastnosti, ktoré daná riziková miera spĺňa. Naopak symbol ✗ označuje vlastnosti, ktoré riziková miera nespĺňa.

Rizikové miery*	Monotónnosť	Sub-aditivita	Pozitívna homogenita	Translačná ekvivarencia	Konvexnosť
var	✗	✗	✗	✗	✗
sd	✗	✗	✓	✗	✗
sv	✗	✗	✗	✗	✗
VaR	✓	✗	✓	✓	✗
CVaR	✓	✓	✓	✓	✓

Poznámka: * Legenda k skratkám rizikových mier sa nachádza v tabuľke 1.1.

Tabuľka 1.2: Koherentné vlastnosti rizikových mier.

Z vyššie uvedenej tabuľky vidíme, že CVaR je koherentná riziková miera. Interpretáciu jednotlivých axiémov a dôkaz vlastností u rizikových mier VaR a CVaR sa čitateľ môže dočítať napríklad v bakalárskej práci (Drábková, 2007, sekcia 2.1 a 3.1). Dôkaz vlastností alebo nájdenie jednoduchých proti príkladov pre rozptyl, smerodajnú odchýlku a semi-varianciu je nechané na čitateľa.

V nasledujúcej kapitole sa budeme venovať skúmaním menej známych metód a obecných úloh v SP.

2. Nové trendy v stochastickom programovaní

V praxi sa často stretávame s problémami, u ktorých jednoduché stochastické modely neposkytujú uspokojujúce riešenie. Preto sa teória stochastického programovania neustále rozširuje a snaží sa nájsť efektívne metódy a algoritmy s rozumnou časovou náročnosťou na riešenie zložitejších problémov.

V tejto kapitole sa budeme zaoberať obecnějšími modelmi, ktoré pokrývajú väčšie spektrum úloh. Napríklad uvedieme si úlohy, v ktorých účelová funkcia nemusí byť lineárne závislá na pravdepodobnostnej miere. Taktiež sa zameriame na úlohy viackriteriálneho stochastického programovania, ktoré podrobnejšie popíšeme. Ide o úlohy, v ktorých sa rozhodujeme na základe viacerých kritérií.

2.1 Nelineárna závislosť na pravdepodobnostnej miere

V tejto sekcii si uvedieme príklad modelu, v ktorom účelová funkcia nemusí lineárne závisieť na pravdepodobnostnej miere. Tento model bude motivovaný na základe článku (Kaňková, 2013). Skôr než začneme, tak si pripomeňme jeden z najjednoduchších prístupov, ktorý sa využíva v stochastických úlohách – minimalizovanie „očakávanej“ straty respektíve maximalizovanie „očakávaného“ zisku. Predpokladajme, že stredné hodnoty v nasledujúcich úlohách existujú

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\mathbf{x}} \quad & E f_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}(\omega)) \\ \text{z.p} \quad & \mathbf{x} \in \mathcal{X}_F, \end{aligned} \tag{2.1}$$

kde $\boldsymbol{\xi} := \boldsymbol{\xi}(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_s(\omega))$ je s -rozmerný náhodný vektor. Jednotlivé zložky $\xi_i(\omega) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sú náhodné veličiny z pravdepodobnostného priestoru (Ω, \mathcal{A}, P) . Nech funkcia $f_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ je definovaná na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$ a symbolom F označme distribučnú funkciu náhodného vektora $\boldsymbol{\xi}$. Stredná hodnota E je braná vzhľadom k F . Neprázdnu množinu prípustných riešení, ktorá môže závisieť na F označujeme ako $\mathcal{X}_F \subseteq \mathbb{R}^n$. Príklad takej množiny môže byť

$$\mathcal{X}_F = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : E f_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq 0 \quad \text{pre } i = 1, \dots, m\},$$

kde $f_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ sú funkcie, ktoré závisia na deterministickom a náhodnom vektore. Všimnime si, že účelová funkcia v úlohe (2.1) závisí lineárne na pravdepodobnostnej miere, ktorá korešponduje F . Preto sa budeme zaoberať obecnějšími modelmi, v ktorých účelová funkcia už nebude nutne závisieť lineárne na pravdepodobnostnej miere. Budeme skúmať nasledujúci model

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\mathbf{x}} \quad & E \bar{f}_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, E h_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), E h_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \dots, E h_\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})) \\ \text{z.p} \quad & \mathbf{x} \in \mathcal{X}_F, \end{aligned} \tag{2.2}$$

kde $h_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ sú funkcie definované na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$ a reálna funkcia $\bar{f}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ je funkcia definovaná na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^\ell$. Označme $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = (h_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), h_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \dots, h_\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}))$.

Prípustná množina v tomto prípade môže vyzeráť nasledovne

$$\mathcal{X}_F = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbb{E} \bar{f}_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \mathbb{E} \mathbf{h}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})) \leq 0 \quad \text{pre } i = 1, \dots, m\}, \quad (2.3)$$

kde funkcie $\bar{f}_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ sú definované na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^\ell$.

Častokrát sa v praxi stáva, že nepoznáme distribučnú funkciu F náhodného vektora $\boldsymbol{\xi}$, a preto ju nahrádzame empirickým odhadom F^N na základe historických dát. Prirodzenou otázkou potom je, ako optimálne riešenia úloh (označme postupne \mathbf{x}_N^* respektíve $\bar{\mathbf{x}}_N^*$)

$$\text{Min}_{\mathbf{x}} \quad \mathbb{E}_{F^N} f_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}(\omega)) \quad \text{z.p.} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X}_{F^N},$$

$$\text{Min}_{\mathbf{x}} \quad \mathbb{E}_{F^N} \bar{f}_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \mathbb{E}_{F^N} h_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \mathbb{E}_{F^N} h_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \dots, \mathbb{E}_{F^N} h_\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})) \quad \text{z.p.} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X}_{F^N}$$

súvisia s optimálnymi riešeniami pôvodných úloh \mathbf{x}^* (2.1) respektíve $\bar{\mathbf{x}}^*$ (2.2). Podotknime, že stredná hodnota \mathbb{E} je braná vzhľadom k F^N . Množinu prípustných riešení, ktorú môže ovplyvňovať F^N označujeme \mathcal{X}_{F^N} . O množine \mathcal{X}_{F^N} poznamenajme, že v prvej úlohe obsahuje lineárne podmienky a v druhom modeli zahŕňa aj nelineárne podmienky. V ideálnom prípade by sme chceli, aby optimálne riešenia korešpondujúcich úloh boli dostatočne blízko.

Začali sa preto riešiť otázky, či stochastické odhady \mathbf{x}_N^* , $\bar{\mathbf{x}}_N^*$ sú konzistentnými odhadmi \mathbf{x}^* a $\bar{\mathbf{x}}^*$. Taktiež matematikov zaujímala asymptotické rozdelenie odhadov \mathbf{x}_N^* a $\bar{\mathbf{x}}_N^*$ a rýchlosť konvergenzie. Viac o konvergentnosti odhadov a ich štatistických vlastností sa čitateľ môže dočítať v článku (Dentcheva a kol., 2016).

Uveďme si nejaké príklady rizikových mier zo sekcie 1.5, ktoré dokážeme zapísať pomocou modelu (2.2). Taktiež budeme skúmať, či účelová funkcia lineárne závisí na pravdepodobnostnej miere. Pripomeňme si Markowitzov model (1.21), ktorý preformulujeme do inej podoby. Niekedy sa investor snaží minimalizovať riziko investície, pričom má predstavu o očakávanom výnose $r_{min} \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{V} \mathbf{x} \\ \text{z.p.} \quad & \mathbf{r}^\top \mathbf{x} \geq r_{min} \\ & \mathbf{1}^\top \mathbf{x} = 1, \mathbf{x} \geq 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Obecne by sme vyššie uvedený model (2.4) mohli zapísať nasledovne

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \\ \text{z.p.} \quad & \mathbf{x} \in \mathcal{X}_F, \end{aligned} \quad (2.5)$$

kde funkcia $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ je definovaná na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$ a bude reprezentovať mieru rizika. Naďalej neprázdnu množinu prípustných riešení, ktorá môže závisieť na F budeme označovať ako $\mathcal{X}_F \subseteq \mathbb{R}^n$. Predpokladajme, že náhodný vektor $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\rho}$ je n -rozmerný vektor náhodných výnosov vid' model (1.21). Potom \mathcal{X}_F vyzerá nasledovne

$$\mathcal{X}_F := \mathcal{X}_F(r_{min}) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} : \mathbb{E}(\boldsymbol{\xi}^\top \mathbf{x}) \geq r_{min}\}, \quad (2.6)$$

kde \mathcal{X} je deterministická množina $\mathcal{X} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{1}^\top \mathbf{x} = 1, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$. Označme v modeli (2.4) prvky kovariančnej matice \mathbf{V} (v_{ij}) pre $i, j = 1, \dots, n$. Potom

rozpísaný tvar modelu (2.4) vyzerá nasledovne

$$\begin{aligned}
\min_{\mathbf{x}} \quad & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i v_{ij} x_j \\
\text{z.p.} \quad & \sum_{i=1}^n r_i x_i \geq r_{\min}, \\
& \sum_{i=1}^n x_i = 1, \quad x_i \geq 0 \text{ pre } i = 1, \dots, n,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

kde očakávané výnosy $r_i = \mathbb{E} \xi_i$ a prvky matice $v_{ij} = \mathbb{E}(\xi_i - r_i)(\xi_j - r_j)$ pre $i, j = 1, \dots, n$. Zo zápisu modelu vidíme, že účelová funkcia nezávisí lineárne na pravdepodobnostnej miere. Pokúsme sa ukázať, že model (2.7) je špecifickým prípadom úlohy (2.2) s \mathcal{X}_F v tvare (2.3). Všimnime si, že platí

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n r_i x_i &= \mathbb{E} \left\{ \sum_{i=1}^n \xi_i x_i \right\} \\
\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i v_{ij} x_j &= \mathbb{E} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [x_i \xi_i \xi_j x_j - x_i \xi_i \mathbb{E}(\xi_j x_j)] \right\}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Stačí už len nájsť predpis funkcie $\bar{f}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, ktorá v tomto prípade je definovaná na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Položme

$$\begin{aligned}
\bar{f}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [x_i y_i y_j x_j - x_i y_i z_j], \quad z_i = \mathbb{E} h_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \\
h_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= y_i x_i, \quad i = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Množinu \mathcal{X}_F zvolíme nasledovne

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_F &:= \mathcal{X}_F(r_{\min}) = \{ \mathbf{x} \in \mathcal{X} : \mathbb{E} \bar{f}_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{z}) \leq 0 \}, \\
\bar{f}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) &:= \bar{f}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, r_{\min}) = r_{\min} - \sum_{i=1}^n z_i, \text{ kde} \\
z_i &= \mathbb{E} h_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \quad h_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = y_i x_i, \quad i = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Zrejme dosadením vyššie uvedených funkcií a množiny \mathcal{X}_F do úlohy (2.2) dostávame úlohu (2.7). Rovnako budeme skúmať a analyzovať úlohu (2.4) aj pre iné rizikové miery. Konkrétne pre priemernú absolútnu odchýlku, hodnotu v riziku a podmienenú hodnotu v riziku. Pracovať budeme s deterministickou množinou \mathcal{X} v tvare $\mathcal{X} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{1}^\top \mathbf{x} = 1, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$.

2.1.1 Priemerná absolútna odchýlka - MAD

V roku 1971 navrhol Sharpe merať riziko ako priemernú absolútnu odchýlku (anglicky „mean absolute deviation“) $MAD(\mathbf{x}) := \mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n \xi_i x_i - \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n \xi_i x_i \right] \right|$. Po 20-tich rokoch Sharpeho myšlienku aplikovali Kono a Yamazaki v optimalizácii

portfólia a uviedli model

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n \xi_i x_i - \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n \xi_i x_i \right] \right| \\ \text{z.p.} \quad & \sum_{i=1}^n r_i x_i \geq r_{\min}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Vidíme, že v tomto prípade opäť účelová funkcia nie je lineárne závislá na pravdepodobnostnej miere. Definujme funkciu $\bar{f}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ a množinu \mathcal{X}_F nasledovne

$$\begin{aligned} \bar{f}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) &= |\mathbf{y}^\top \mathbf{x} - \mathbf{z}|, \quad \mathbf{z} = \mathbb{E} \mathbf{h}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}^\top \mathbf{x}, \\ \mathcal{X}_F &= \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} : \mathbb{E}(\boldsymbol{\xi}^\top \mathbf{x}) \geq r_{\min}\}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Všimnime si, že po dosadení do úlohy (2.2) dostaneme model (2.11). Uvedme si, ako dokážeme vyriešiť danú úlohu v prípade, že náhodný vektor výnosov $\boldsymbol{\xi}$ (s očakávaným výnosom \mathbf{r}) má konečný počet scenárov $\boldsymbol{\xi}^1 = \boldsymbol{\xi}(\omega_1), \boldsymbol{\xi}^2 = \boldsymbol{\xi}(\omega_2), \dots, \boldsymbol{\xi}^S = \boldsymbol{\xi}(\omega_S)$ s príslušnými pravdepodobnosťami p_1, \dots, p_S .

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \sum_{i=1}^S p_i y_i \\ \text{z.p.} \quad & y_i \geq \mathbf{r}^\top \mathbf{x} - \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\xi}^i, \quad i = 1, \dots, S, \\ & y_i \geq \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\xi}^i - \mathbf{r}^\top \mathbf{x}, \quad i = 1, \dots, S, \\ & \sum_{i=1}^S p_i \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\xi}^i \geq r_{\min}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Vidíme, že vyššie uvedená úloha je úlohou lineárneho programovania, ktorú dokážeme základnými algoritmami vyriešiť.

2.1.2 Hodnota v riziku - VaR

Analogicky budeme teraz skúmať model, v ktorom sa budeme snažiť minimalizovať hodnotu v riziku $VaR_\alpha(\mathbf{x}) = \min\{u \in \mathbb{R} : P[\omega \in \Omega : L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq u] \geq \alpha\}$, kde $\alpha \in (0, 1)$. V tomto prípade stratová funkcia $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = -\boldsymbol{\xi}^\top \mathbf{x}$. Potom model, ktorým sa budeme zaoberať vyzerá nasledovne

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}, u} \quad & u \\ \text{z.p.} \quad & P[\omega \in \Omega : -\boldsymbol{\xi}^\top \mathbf{x} \leq u] \geq \alpha, \\ & \sum_{i=1}^n r_i x_i \geq r_{\min}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Vidíme, že tým dostávame úlohu so stratovou funkciou v oblasti obmedzení. Definujme funkciu $\bar{f}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ a množinu $\mathcal{X}_F := \mathcal{X}_F(\alpha, r_{\min})$ nasledovne

$$\begin{aligned} \bar{f}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) &= \min_{u \in \mathbb{R}} u, \\ \mathcal{X}_F(\alpha, r_{\min}) &= \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} : P[\omega \in \Omega : L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq u] \geq \alpha, \mathbb{E}(\boldsymbol{\xi}^\top \mathbf{x}) \geq r_{\min}\}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Všimnime si, že po dosadení do úlohy (2.2) dostaneme model (2.14). Uvedme si, ako dokážeme vyriešiť danú úlohu v prípade, že náhodný vektor výnosov ξ pochádza z diskrétného rozdelenia. Predpokladajme, že máme konečný počet scenárov $\xi^1 = \xi(\omega_1), \xi^2 = \xi(\omega_2), \dots, \xi^S = \xi(\omega_S)$ s príslušnými pravdepodobnosťami p_1, \dots, p_S . Potom model pre VaR dokážeme zapísať nasledovne

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}, \mathbf{y}, u} \quad & u \\ \text{z.p.} \quad & -\mathbf{x}^\top \xi^i - u \leq M(1 - y_i), \quad i = 1, \dots, S, \\ & \sum_{i=1}^S p_i y_i \geq \alpha, \quad y_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, S, \\ & \sum_{i=1}^S p_i \mathbf{x}^\top \xi^i \geq r_{\min}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

kde M je dostatočne veľká konštanta napríklad $M \geq \max_{i=1, \dots, S} \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} (-\mathbf{x}^\top \xi^i - u)$. Opäť sa nám podarilo previesť pôvodný problém na úlohu lineárneho programovania, ktorú dokážeme numericky rýchlo vyriešiť pre rozumný počet scenárov.

2.1.3 Podmienená hodnota v riziku - CVaR

Na záver si uvedme model pre minimalizovanie podmienenej hodnoty v riziku, $CVaR_\alpha(\mathbf{x}) = \min\{a \in \mathbb{R} : a + \frac{1}{1-\alpha} \mathbb{E}[L(\mathbf{x}, \xi) - a]^+\}$ pre $\alpha \in (0, 1)$. V tomto prípade je taktiež stratová funkcia $L(\mathbf{x}, \xi) = -\xi^\top \mathbf{x}$. Potom model pre CVaR môžeme zapísať nasledovne

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}, a} \quad & a + \frac{1}{1-\alpha} \mathbb{E}[-\xi^\top \mathbf{x} - a]^+ \\ \text{z.p.} \quad & \sum_{i=1}^n r_i x_i \geq r_{\min}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Výraz $[\cdot]^+$ definujeme ako $\max\{0, \cdot\}$. Vidíme, že v tomto prípade je účelová funkcia lineárna závislá na pravdepodobnostnej miere. Definujme funkciu $\bar{f}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ a množinu \mathcal{X}_F nasledovne

$$\begin{aligned} \bar{f}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) &= \min_{a \in \mathbb{R}} \left\{ a + \frac{1}{1-\alpha} \mathbf{z} \right\}, \quad \mathbf{z} = \mathbb{E} \mathbf{h}(\mathbf{x}, \xi), \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &:= \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, a) = [L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - a]^+, \\ \mathcal{X}_F &= \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} : \mathbb{E}(\xi^\top \mathbf{x}) \geq r_{\min}\}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Všimnime si, že po dosadení $\bar{f}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ a \mathcal{X}_F do úlohy (2.2) dostaneme model (2.17). Opäť sa budeme zaoberať otázkou, ako dokážeme vyriešiť danú úlohu v prípade, že náhodný vektor výnosov ξ má konečný počet scenárov $\xi^1 = \xi(\omega_1), \xi^2 = \xi(\omega_2), \xi^S = \xi(\omega_S)$ s príslušnými pravdepodobnosťami p_1, \dots, p_S .

Využitím štandardného triku, kde výraz $[\cdot]^+$ nahradíme premennou \mathbf{y} a pridáme pár podmienok do oblastí obmedzení, dostávame model pre CvaR v nasledujúcej podobe

$$\begin{aligned}
\min_{\mathbf{x}, a} \quad & a + \frac{1}{1 - \alpha} \sum_{i=1}^S p_i y_i \\
\text{z.p.} \quad & y_i \geq -\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\xi}^i - a, \quad i = 1, \dots, S, \\
& y_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, S, \\
& \sum_{i=1}^S p_i \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\xi}^i \geq r_{\min}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X}.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Aj v tomto prípade sa nám podarilo zlinearizovať pôvodný problém. Viac príkladov aj s empirickými odhadmi riešení môže zvedavý čitateľ nájsť v článku (Ermoliev a Norkin, 2013, sekcia 2).

2.2 Viackriteriálne programovanie

Často sa nám v živote u niektorých situácií stáva, že robíme rozhodnutia na základe viacerých kritérií. Napríklad, ak si chceme kúpiť nové auto, tak nás nezaujíma len cena, ale aj výkon, spotreba Takýmto problémom sa zaoberá viackriteriálne programovanie (ďalej už len VP). Podotknime, že sa zatiaľ budeme zaoberať **deterministickou verziou** úlohy VP, ktorú si môžeme definovať nasledovne

$$\begin{aligned}
\text{Min} \quad & \{f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})\} \\
\text{z.p.} \quad & \mathbf{x} \in \mathcal{X},
\end{aligned} \tag{2.20}$$

kde \mathcal{X} je uzavretá množina prípustných riešení. Parameter $k(\geq 2)$ určuje počet účelových funkcií $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Označme vektor účelových funkcií ako $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x}))^\top$ a rozhodovací vektor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$. Otázkou zostáva, ako definovať optimálne riešenie? Ideálne by bolo, ak by naše optimálne riešenie označme ako \mathbf{x}^* minimalizovalo zároveň všetky účelové funkcie. V praxi je tento požiadavok málokedy splnený, a preto sa definuje tzv. **Paretové riešenie**. Nasledujúce definície sú prevzaté z knihy (Ehrgott, 2005, definícia 2.1.).

Definícia 5. Hovoríme, že riešenie $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}$ je **Paretoovsky optimálne** v úlohe VP (2.20) ak neexistuje $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ také, že platí $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})$ a zároveň $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})$.

Poznámka. V literatúre sa niekedy používa názov eficientné riešenie alebo nedominované riešenie. V nasledujúcich podsekcích budem častejšie používať názov eficientné riešenie.

Z definície je zrejmé, že úloha VP môže mať viacero eficientných riešení. Našou úlohou bude nájsť množinu eficientných riešení. Potom na základe subjektívnych preferencií sa môže investor rozhodnúť, ktoré riešenie mu najviac vyhovuje.

V nasledujúcej definícii si uvedieme iný spôsob, ako sa dá definovať optimálne riešenie v úlohe viackriteriálneho programovania.

Definícia 6. Hovoríme, že riešenie $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}$ je **Paretoovsky slabo optimálne** v úlohe VP (2.20) ak neexistuje $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ také, že platí $\mathbf{f}(\mathbf{x}) < \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})$.

Zrejme množina Paretovsky slabó optimálnych riešení je podmnožinou množiny Paretovsky optimálnych riešení. Existuje množstvo metód, ktoré sa zaoberajú hľadaním týchto riešení. Veľa z nich sa snaží preformulovať VP na jednokriteriálny problém, ktorý už dokážeme štandardnými postupmi vyriešiť. Tento proces sa volá „skalarizácia“, o ktorom budeme viac hovoriť v nasledujúcej podsekcii.

2.2.1 Skalarizačný proces

Ako bolo už načrtnuté, tak sa budeme snažiť nájsť postup, pomocou ktorého transformujeme náš originálny VP problém (2.20) na jednokriteriálny. Jeden z možných prístupov je formulovať originálnu úlohu nasledovne

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & g(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})) \\ \text{z.p.} \quad & \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \end{aligned} \tag{2.21}$$

kde $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ je vhodne zvolená funkcia. Od riešení tejto úlohy by sme očakávali, že po nájdení optimálnych riešení v úlohe (2.21) by sme vedeli povedať niečo aj o eficientných riešeniach v originálnom probléme (2.20). V opačnom prípade by tento postup nemal význam. Preto musí funkcia g spĺňať určité predpoklady, ktoré si sformulujeme v nasledujúcej vete. Pre jednoduchosť a prehľadnosť v texte zavedme značenie N_k , ktoré bude symbolizovať množinu indexov $\{1, \dots, k\}$.

Veta 5. Nech \mathcal{X} je kompaktná množina a účelové funkcie $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sú spojité na \mathcal{X} pre $i \in N_k$. Nech $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ je neklesajúca spojitá funkcia. Potom aspoň jedno riešenie patriace do množiny

$$\mathcal{X}_g^* := \{x \in \mathcal{X} : g(\mathbf{f}(x)) \leq g(\mathbf{f}(y)) \quad \forall y \in \mathcal{X}\} \tag{2.22}$$

je eficientné riešenie VP (2.20).

Dôkaz. Dôkaz je uvedený v knihe (Dupačová a kol., 2002, Veta 3.1.2)

□

Jednou z obľúbených funkcií je „váhová funkcia“ reprezentovaná vektorom váh $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)^\top$

$$g(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \sum_{i \in N_k} \lambda_i f_i(\mathbf{x}), \quad \text{kde } \boldsymbol{\lambda} \geq 0 \text{ a zároveň } \boldsymbol{\lambda} \neq 0.$$

Ako už vyplýva z názvu, tak jednotlivým účelovým funkciám priradíme nejakú váhu podľa subjektívnych preferencií. Potom platia nasledujúce vety.

Veta 6. Nech $\mathbf{x}^ \in \mathcal{X}$ je optimálne riešenie úlohy*

$$\text{Min}_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \sum_{i \in N_k} \lambda_i f_i(\mathbf{x}), \tag{2.23}$$

kde $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ pre $i \in N_k$. Predpokladajme, že buď $\boldsymbol{\lambda} > 0$ alebo \mathbf{x}^ je jednoznačné optimálne riešenie. Potom \mathbf{x}^* je eficientné riešenie úlohy VP (2.20).*

Dôkaz. Dôkaz je uvedený v bakalárskej práci (Malá, 2012, Veta 2.2).

□

Veta 7. Uvažujme viackriteriálnu úlohu (2.20). Dodatočne predpokladajme, že funkcie $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ pre $i \in N_k$ sú lineárne a množina \mathcal{X} je konvexná polyedrická množina. Potom platí:

$$\hat{\mathbf{x}} \text{ je eficientné riešenie úlohy (2.20)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\hat{\mathbf{x}} \text{ je optimálne riešenie úlohy (2.23) pre } \boldsymbol{\lambda} > 0.$$

Dôkaz. Dôkaz prvej implikácie (\Rightarrow) je analógiou dôkazu vety z knihy (Dupačová a kol., 2002, Veta 3.1.5) s využitím faktu uvedeného v komentári (Dupačová a kol., 2002, Komentár 3.1.6). Dôkaz druhej implikácie (\Leftarrow) vyplýva z vety 6. \square

2.2.2 Metóda epsilonového obmedzenia

Ďalšou metódou ako vieme úlohu VP preformulovať na jednokriteriálnu úlohu je **metóda epsilonového obmedzenia**. Tento prístup spočíva v tom, že si zvolíme ľubovoľnú účelovú funkciu, ktorú budeme minimalizovať. Ostatné účelové funkcie presunieme do obmedzujúcich podmienok s nastavenou hornou hranicou $\varepsilon \in \mathbb{R}^{k-1}$. Týmto postupom dostávame nasledujúcu úlohu

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & f_j(\mathbf{x}) \\ \text{z.p.} \quad & f_i(\mathbf{x}) \leq \varepsilon_i \quad i \in N_k \setminus j, \\ & \mathbf{x} \in \mathcal{X}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Opäť si sformulujeme vetu, ktorá dáva do súvislosti eficientné riešenie z úlohy VP (2.20) s optimálnymi riešeniami z úlohy s epsilonovým obmedzením (2.24).

Veta 8. (O úlohe s epsilonovým obmedzením)

Nech množina prípustných riešení $\mathcal{X}_\varepsilon := \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} : f_i(\mathbf{x}) \leq \varepsilon_i, i \in N_k \setminus j\} \neq \emptyset$. Potom platí

1. Ak existuje eficientné riešenie $\hat{\mathbf{x}}$ v úlohe VP (2.20) potom $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^{k-1}$ také, že $\hat{\mathbf{x}}$ je optimálne riešenie úlohy (2.24)
2. Ak existuje jednoznačné optimálne riešenie \mathbf{x}^* úlohy (2.24), potom \mathbf{x}^* je eficientné riešenie v úlohe VP (2.20).

Dôkaz. Dôkaz je uvedený v bakalárskej práci (Malá, 2012, Veta 2.4). \square

2.2.3 Metóda cieľového programovania

Myšlienkou tohto prístupu je nájsť riešenie $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, ktorého funkčné hodnoty $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ sú najbližšie k funkčným hodnotám optimálnych riešení pre jednotlivé účelové funkcie. Tým máme namysli $\mathbf{f}^* = (f_1, \dots, f_k)$, kde $f_i = \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} f_i(\mathbf{x})$ pre $i \in N_k$.

Vzdialenosť medzi funkčnými hodnotami budeme merať pomocou L_p normy, $1 \leq p \leq \infty$. Potom na nájdenie eficientného riešenia v úlohe VP (2.20) stačí vyriešiť nasledujúcu optimalizačnú úlohu

$$\text{Min}_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \|\mathbf{T}(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}^*)\|_p, \tag{2.25}$$

kde $\mathbf{T} = \text{diag}\{t_1, \dots, t_k\}$ je diagonálna matica s kladnými prvkami na diagonále ($t_i > 0 \forall i \in N_k$). Platí nasledujúca veta

Veta 9. (O úlohe cieľového programovania)

1. Ak \mathbf{x}^* je optimálne riešenie úlohy (2.25) pre $1 \leq p < \infty$, potom \mathbf{x}^* je efficientné riešenie v úlohe VP (2.20).
2. Pre $p = \infty$ existuje aspoň jedno optimálne riešenie minimaxovej úlohy

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \max_{i \in N_k} t_i |f_i(\mathbf{x}) - f_i^*|, \quad (2.26)$$

ktoré je efficientným riešením v úlohe VP (2.20).

Dôkaz. Dôkaz je uvedený v bakalárskej práci (Malá, 2012, Veta 2.5). □

2.2.4 Skalarizačná funkcia s parametrom

V tejto podsekcii si sformulujeme ešte jeden prístup, ktorý namiesto ideálneho obrazu optimálnych riešení \mathbf{f}^* pracuje s tzv. **referenčným bodom** $\mathbf{f}^R = (f_1^R, \dots, f_k^R)$. Tento bod je zvolený tak, aby obsahoval zmysluplne zvolené hranice pre hodnoty jednotlivých účelových funkcií. Zaoberať sa budeme úlohou

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \sum_{i \in N_k} \max[t_i(f_i(\mathbf{x}) - f_i^R), 0], \quad (2.27)$$

kde o množine \mathcal{X} budeme predpokladať, že je uzavretá, neprázdna a kompaktná množina prípustných riešení.

Poznámka. Všimnime si, že v úlohe sa nevyskytuje absolútna hodnota. Myšlienkou tohto prístupu je využiť inú „penalizačnú funkciu“, ktorá penalizuje zlé (kladné) odchýlky od referenčného bodu a nepenalizuje dobré (negatívne) odchýlky od referenčného bodu.

Skôr ako uvedieme vety, ktoré dávajú do súvislosti riešenia z úlohy (2.27) s „optimálnymi riešeniami“ v úlohe VP (2.20), tak budeme potrebovať si zadefinovať pojem **dominantný vektor**.

Definícia 7. Uvažujme dva vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Hovoríme, že vektor \mathbf{a} dominuje vektoru \mathbf{b} ak $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ a $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$. Hovoríme, že vektor \mathbf{a} striktne dominuje vektoru \mathbf{b} ak $\mathbf{a} < \mathbf{b}$.

Veta 10. Nech \mathbf{f}^R je referenčný bod, ktorý nie je dominovaný žiadnym vektorom funkčných hodnôt prípustných riešení z úlohy (2.27). Predpokladajme, že $t_i > 0$ pre $i \in N_k$. Potom optimálne riešenie úlohy (2.27) je Paretovsky slabo optimálnym riešením v úlohe VP (2.20).

Dôkaz. Dôkaz je uvedený v článku (Ruiz a kol., 2008, Veta 2). □

Veta 11. Nech f^R je ľubovoľný referenčný bod a $t_i > 0$ pre $i \in N_k$. Potom existuje aspoň jedno optimálne riešenie úlohy (2.27), ktoré je Paretovsky optimálnym v úlohe VP (2.20). Ak má úloha (2.27) jednoznačné optimálne riešenie, tak je zároveň aj Paretovsky optimálnym v úlohe VP (2.20).

Dôkaz. Dôkaz je uvedený v článku (Ruiz a kol., 2008, Veta 1).

□

Na záver si uveďme parametrickú verziu úlohy (2.27). Niekedy sa nám môže stať, že pri rozhodovaní máme k dispozícii niekoľko rovnocenných kritérií (t.j. nemáme kritéria zoradené podľa preferencií) a my potrebujeme urobiť rozhodnutie. Každopádne chceme nájsť riešenie, ktoré spĺňa aspoň nejaký počet (označme q) kritérií. Úloha, ktorú potom riešime je nasledovná

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \max_{I_q \subseteq N_k: |I_q|=q} \left\{ \sum_{i \in I_q} \max[t_i(f_i(\mathbf{x}) - f_i^R), 0] \right\}, \quad (2.28)$$

kde $q \in N_k$ a $t_i > 0$ pre $i \in N_k$. Poznamenajme, že účelová funkcia je nezáporná a pre $q = k$ je zhodná s účelovou funkciou v úlohe (2.27). Opäť existuje paralela medzi optimálnymi riešeniami v úlohe (2.28) s optimálnymi riešeniami v úlohe VP (2.20). Platia nasledujúce vety.

Veta 12. Nech f^R je referenčný bod, ktorý nie je striktne dominovaný žiadnym vektorom funkčných hodnôt prípustných riešení z úlohy (2.27). Predpokladajme, že $t_i > 0$ pre $i \in N_k$. Potom optimálne riešenie úlohy (2.27) je Paretovsky slabo optimálnym riešením v úlohe VP (2.20).

Dôkaz. Dôkaz je uvedený v článku (Nikulin a kol., 2012, Veta 2).

□

Veta 13. Nech f^R je ľubovoľný referenčný bod a $t_i > 0$ pre $i \in N_k$. Potom existuje aspoň jedno optimálne riešenie úlohy (2.28), ktoré je Paretovsky optimálnym v úlohe VP (2.20). Ak má úloha (2.27) jednoznačné optimálne riešenie, tak je zároveň aj Paretovsky optimálnym v úlohe VP (2.20).

Dôkaz. Dôkaz prebieha analogicky ako v článku (Ruiz a kol., 2008, Veta 1).

□

2.3 Viackriteriálne stochastické programovanie

V predošlej sekcii sme si ukázali viacero spôsobov, ako vieme postupovať v deterministických úlohách viackriteriálneho programovania. V tejto sekcii si ukážeme, ako dokážeme vyriešiť úlohy VP ak sa náhoda vyskytuje v účelovej funkcii. Táto sekcia je motivovaná článkom (Gutjahr a Pichler, 2016). Zaoberajme sa nasledujúcou úlohou, v ktorej investor chce maximalizovať svoj zisk na základe viacerých kritérií, ktoré závisia na náhodnej zložke.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \{f_1(\mathbf{x}, \omega), f_2(\mathbf{x}, \omega), \dots, f_k(\mathbf{x}, \omega)\} \\ \text{z.p.} \quad & \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

kde \mathcal{X} je uzavretá množina prípustných riešení. Parameter $k(\geq 2)$ určuje počet účelových funkcií $f_i : \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ závislých na náhodnej zložke $\omega \in \Omega$. Označme

vektor účelových funkcií ako $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \omega) = (f_1(\mathbf{x}, \omega), f_2(\mathbf{x}, \omega), \dots, f_k(\mathbf{x}, \omega))^\top$ a rozhodovací vektor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$. Predpokladajme, že poznáme distribučné funkcie náhodných veličín $f_i(\mathbf{x}, \omega)$ pre $i \in N_k$.

Otázkou zase zostáva, ako sa dokážeme vysporiadať s náhodnou zložkou v účelovej funkcii a aké prípustné riešenia považujeme za optimálne. Jeden z užitočných prístupov je využiť koncept stochastickej dominancie (viď sekciu 3.1), o ktorej budeme písať neskôr.

Rovnako ako v sekcii o deterministickom VP (viď 2.2) môžeme obdobne postupovať aj v stochastickom VP. Buď prevedieme náš problém (2.29) na deterministický VP alebo ho zjednodušíme na jednorozmerný stochastický problém. To jest využiť môžeme tzv. viackriteriálnu metódu alebo stochastickú metódu.

Viackriteriálne metódy (VM) definujú pre každú účelovú funkciu f_j vektor

$$\left(\mathcal{F}_j^{(1)}(f_j(\mathbf{x}, \omega)), \dots, \mathcal{F}_j^{(r_j)}(f_j(\mathbf{x}, \omega)) \right), \quad (2.30)$$

kde pod jednotlivými funkcionálmi $\mathcal{F}_j^{(s)}$ si môžeme predstaviť strednú hodnotu, rozptyl, kvantil alebo akúkoľvek rizikovú mieru pre náhodnú veličinu $f_j(\mathbf{x}, \omega)$. Potom môžeme náš pôvodný problém (2.29) prepísať nasledovne

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \{Z_1^{(1)}(\mathbf{x}), \dots, Z_1^{(r_1)}(\mathbf{x}), \dots, Z_k^{(1)}(\mathbf{x}), \dots, Z_k^{(r_k)}(\mathbf{x})\} \\ \text{z.p.} \quad & \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

kde $Z_j^{(s)}(\mathbf{x}) = \mathcal{F}_j^{(r_j)}(f_j(\mathbf{x}, \omega))$ pre $s = 1, \dots, r_j, j = 1, \dots, k$. Po preformulovaní úlohy sa snažíme nájsť „Paretovsky optimálne riešenia“. Nevýhodou tohto prístupu je, že síce pre každú účelovú máme niekoľko súhrnných štatistík, ale neberie sa do úvahy korelácia medzi jednotlivými účelovými funkciami, čo je v niektorých prípadoch neprípustné.

Poznámka. Všimnime si, že v úlohe (2.31) **maximalizujeme** vektor súhrnných štatistík jednotlivých účelových funkcií. V tomto prípade pod pojmom Paretovsky optimálnym riešením (viď definíciu 5) rozumieme prípustné riešenie $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}$, pre ktoré neexistuje $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, že platí $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})$ a zároveň $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})$. Analogicky pre Paretovsky slabo optimálne riešenie, dominantný vektor

Stochastické metódy využívajú princíp skalarizačnej funkcie $u : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ t.j. prevedieme úlohu na úlohu stochastického programovania s jednou účelovou funkciou

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & u(f_1(\mathbf{x}, \omega), f_2(\mathbf{x}, \omega), \dots, f_k(\mathbf{x}, \omega)) \\ \text{z.p.} \quad & \mathbf{x} \in \mathcal{X}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Výhodou tohto prístupu je, že už berieme do úvahy koreláciu medzi jednotlivými účelovými funkciami. Na druhej strane, nevýhodou je, že musíme dopredu poznať predpis skalarizačnej funkcie. V tejto práci sa budeme zaoberať viackriteriálnymi metódami.

2.4 Využitie strednej hodnoty vo VM

V tejto sekcii si ukážeme jeden z najzákladnejších prístupov, ktorý sa využíva vo VM viď (2.30). Funkcionál $\mathcal{F}_j^{(s)}(f_j(\mathbf{x}, \omega))$ zvolíme ako strednú hodnotu

$E[f_j(\mathbf{x}, \omega)]$. Dosadením do úlohy (2.31) dostávame úlohu

$$\text{Max} \quad \{E[f_1(\mathbf{x}, \omega)], \dots, E[f_k(\mathbf{x}, \omega)]\} \quad \text{z.p.} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X}. \quad (2.33)$$

Poznamenajme, že sa v texte budeme zaoberať vzťahom medzi úžitkovou funkciou a strednou hodnotou, pričom obecné vo VM nie je nutné pracovať s úžitkovými funkciami. Pri hľadaní eficientných riešení v úlohe (2.33) by sme mohli využiť skalarizačný proces, ktorý sme už spomenuli v sekcii 2.2.1. Problémom však je využitie strednej hodnoty v účelovej funkcii. Obecné neplatí, že pre eficientné riešenie $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}$ v úlohe (2.33) existuje úžitková funkcia u taká, že $\hat{\mathbf{x}}$ je riešením úlohy

$$\text{Max} \quad E[u(f_1(\mathbf{x}, \omega), \dots, f_k(\mathbf{x}, \omega))] \quad \text{z.p.} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X}. \quad (2.34)$$

Tento dôsledok je spôsobený tým, že nemôžeme len-tak prehodiť poradie medzi strednou hodnotou E a úžitkovou funkciou u . Čitateľ oboznámený s úžitkovými funkciami v teórii rozhodovania za rizika by si mohol povšimnúť, že ak investor je rizikovo neutrálny, tak spomínané prehodenie je povolené.

V prípade lineárnej voľby u by toto prehodenie bolo umožnené, lebo E je taktiež lineárna. Nech úžitková funkcia u je v tvare

$$u(f_1(\mathbf{x}, \omega), \dots, f_k(\mathbf{x}, \omega)) = \sum_{j=1}^k \lambda_j f_j(\mathbf{x}, \omega) \quad \text{pre } \lambda_j \geq 0.$$

Predpokladajme, že máme konečný počet realizácií náhodnej zložky $(\omega_1, \dots, \omega_N)$ s príslušnými pravdepodobnosťami p_1, \dots, p_N . Tým pádom strednú hodnotu a úžitkovú funkciu v úlohe (2.34) môžeme rozpísať do tvaru

$$\text{Max} \quad \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^k p_i \lambda_j f_j(\mathbf{x}, \omega_i) \quad \text{z.p.} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X}. \quad (2.35)$$

Vyššie uvedená úloha je už deterministická a klasickými postupmi dokážeme nájsť jej optimálne riešenia.

2.5 Mean–risk modely

Zo zápisu úlohy (2.31) vidíme, že čím viac funkcionálov $F_j^{(s)}$ zvolíme, tým aj narastá obtiažnosť a dimenzia problému. Dôsledkom zjednodušenia úlohy sa populárnymi stali tzv. mean–risk modely, v ktorých sa maximalizuje očakávaný výnos a minimalizuje miera rizika, ktorú investíciou postupujeme. Často sa problém zapisuje v skalarizovanej forme

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \lambda E[f(\mathbf{x}, \omega)] - \rho[f(\mathbf{x}, \omega)] \\ \text{z.p.} \quad & \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

kde $f : \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je náhodná veličina. Parameter $\lambda \geq 0$ modeluje vzťah investora k riziku a $\rho[f(\mathbf{x}, \omega)]$ reprezentuje risk prislúchajúci k danej investícii. Ak miera rizika je meraná rozptylom, tak Markowitzov model (1.21) je konkrétny prípad úlohy (2.36). My sa budeme zaoberať o trochu inou úlohou, ktorá vznikne

preformulovaním predošlej úlohy (2.36) do viackriteriálnej úlohy nasledujúcim spôsobom

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & \{ \mathbf{E}[f(\mathbf{x}, \omega)], -\rho(f(\mathbf{x}, \omega)) \} \\ \text{z.p.} & \mathbf{x} \in \mathcal{X}. \end{array} \quad (2.37)$$

Ako bolo už spomenuté, tak vzťah investora k riziku môžeme modelovať rôznymi rizikovými mierami (viď tabuľku 1.1). Tým pádom aj množina eficientných riešení môže byť pre rozličné voľby rizikovej miery rôzna. V nasledujúcej kapitole si povieme ako dokážeme využiť stochastickú dominanciu pri hľadaní eficientných riešení v úlohe (2.37).

3. Stochastická dominancia

Stochastická dominancia (budeme používať skratku SD) je založená na porovnávaní náhodných veličín na základe určitých preferencií. Vo všeobecnosti sa preferujú tie varianty, ktoré nám poskytujú vyšší očakávaný úžitok. To nás vedie na teóriu okolo úžitkovej funkcie, o ktorej budeme písať v nasledujúcej sekcii. Stochastická dominancia má široké zastúpenie v oblasti ekonómie, napríklad pri testovaní eficientnosti portfólia. Príkladom je hľadanie investície, pre ktoré by neexistovala iná investícia, ktorá by dominovala tej našej v zmysle SD.

3.1 Úvod do stochastickej dominancie

V tejto sekcii si ukážeme, ako sa dá koncept stochastickej dominancie využiť aj v úlohách stochastického programovania. Skôr ako začneme, zadefinujeme pojem úžitková funkcia a jej súvis so stochastickou dominanciou. Nasledujúce definície sú prevzaté z dizertačnej práce (Kopa, 2006, definícia 2.1 a sekcia 4.2).

Definícia 8. Hovoríme, že $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je **úžitková funkcia**, ak je spojitá a neklesajúca na \mathbb{R} .

Definícia 9. Nech X, Y sú náhodné veličiny. Hovoríme, že X **dominuje** Y vzhľadom ku generátoru \mathcal{U} (zapisujeme $X \succeq_{\mathcal{U}} Y$) ak $Eu(X) \geq Eu(Y) \forall u \in \mathcal{U}$ také, že stredné hodnoty existujú.

Definícia 10. Nech X, Y sú náhodné veličiny. Hovoríme, že X **striktne dominuje** Y vzhľadom ku generátoru \mathcal{U} (zapisujeme $X \succ_{\mathcal{U}} Y$) ak $Eu(X) \geq Eu(Y) \forall u \in \mathcal{U}$ a $\exists u_0 \in \mathcal{U}$, pre ktoré platí $Eu_0(X) > Eu_0(Y)$. Predpokladáme, že stredné hodnoty existujú.

Medzi hlavné typy generátorov, ktoré sa vyskytujú v literatúrach sú:

- $\mathcal{U}_1 = \{\text{množina všetkých úžitkových funkcií}\}$,
- $\mathcal{U}_2 = \{\text{množina všetkých konkávných úžitkových funkcií}\}$,
- $\mathcal{U}_N = \{u \in \mathcal{U}_1 : (-1)^{i+1}u^{(i)} \geq 0 \text{ pre } i = 1, \dots, N\}$,

kde $u^{(i)}$ symbolizuje i -tú deriváciu úžitkovej funkcie u .

Definícia 11. (Stochastická dominancia pre náhodné veličiny)

Nech X, Y sú náhodné veličiny. Hovoríme, že X **stochasticky dominuje** Y v zmysle

- prvého rádu (zapisujeme $X \succeq_{FSD} Y$) ak $Eu(X) \geq Eu(Y) \forall u \in \mathcal{U}_1$,
- druhého rádu (zapisujeme $X \succeq_{SSD} Y$) ak $Eu(X) \geq Eu(Y) \forall u \in \mathcal{U}_2$,
- N -tého rádu (zapisujeme $X \succeq_{NSD} Y$) ak $Eu(X) \geq Eu(Y) \forall u \in \mathcal{U}_N$.

Hovoríme, že X **stochasticky striktne dominuje** Y v zmysle

- prvého rádu (zapisujeme $X \succ_{FSD} Y$) ak $X \succeq_{FSD} Y$ a $Y \not\succeq_{FSD} X$,

- *druhého rádu* (zapisujeme $X \succ_{SSD} Y$) ak $X \succeq_{SSD} Y$ a $Y \not\preceq_{SSD} X$,
- *N-tého rádu* (zapisujeme $X \succ_{NSD} Y$) ak $X \succeq_{NSD} Y$ a $Y \not\preceq_{NSD} X$,

Poznámka. Skratky FSD, SSD vo vyššie uvedenej definícii sú vytvorené z anglického názvoslovía „first-order stochastic dominance“ a „second-order stochastic dominance“. Zápisom $X \succeq Y$ resp. $X \succ Y$ budeme rozumieť SD vzhľadom k ľubovoľnému typu generátoru \mathcal{U} .

Pre jednoduchosť pri každom spomenutí SD zakaždým predpokladajme, že stredné hodnoty existujú. Uvedme príklady pre stochastickú dominanciu v zmysle FSD a SSD pre diskkrétne a normálne rozdelenie náhodných veličín X, Y :

1. Diskkrétne rozdelenie s rovnako pravdepodobnými scenármi

Nech náhodná veličina X nadobúda hodnoty x_1, \dots, x_S s pravdepodobnosťou $1/S$ a $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_S$. Nech Y nadobúda hodnoty y_1, \dots, y_S s pravdepodobnosťou $1/S$ a $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_S$. Potom platí

$$\begin{aligned} X \succeq_{FSD} Y &\Leftrightarrow x_s \geq y_s \quad \forall s = 1, \dots, S \\ X \succeq_{SSD} Y &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^s x_i \geq \sum_{i=1}^s y_i \quad \forall s = 1, \dots, S. \end{aligned} \quad (3.1)$$

2. Normálne rozdelenie

Nech náhodná veličina X má normálne rozdelenie s parametrami μ_x a σ_x^2 , pre $-\infty < \mu_x < \infty$ a $\sigma_x^2 > 0$. Nech $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$. Potom platí

$$\begin{aligned} X \succeq_{FSD} Y &\Leftrightarrow \mu_x \geq \mu_y \quad \& \quad \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \\ X \succeq_{SSD} Y &\Leftrightarrow \mu_x \geq \mu_y \quad \& \quad \sigma_x^2 \leq \sigma_y^2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dôkazy vyššie uvedených ekvivalencií pre diskkrétne a normálne rozdelenie sa nachádzajú v knihe Levy (2006). Po zavedení potrebných definícií sa môžeme pustiť do riešenia úlohy

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & f(\mathbf{x}, \omega) \\ \text{z.p} \quad & \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

kde $f : \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je náhodná veličina, ktorá závisí na náhodnej zložke $\omega \in \Omega$. O množine prípustných riešení \mathcal{X} predpokladáme, že nezávisí na náhodnej zložke. Poznamenajme, že sa najprv budeme zaoberať len jednokriteriálnou úlohou.

Stochastická dominancia pre náhodné veličiny sa dá prirodzenou cestou aplikovať aj na riešenia v stochastických úlohách. V ideálnom prípade by sme chceli nájsť také riešenie $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, pre ktoré platí $f(\mathbf{x}, \omega) \succeq f(\mathbf{y}, \omega) \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{X}$.

Problémom však je, že takéto riešenie vôbec nemusí existovať. Preto budeme hľadať množinu „**stochasticky nedominovaných**“ riešení t.j. $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, pre ktoré neexistuje $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$ také, že platí $f(\mathbf{y}, \omega) \succ f(\mathbf{x}, \omega)$.

Obecne na dominanciu $\succeq_{\mathcal{U}}$ sa dá pozerať ako na viackriteriálny problém, kde pre každé $u \in \mathcal{U}$ prislúcha jedno kritérium. Preto aj v prípade len s jednou účelovou vid' (3.3) je úloha nekonečno dimenzionálna z hľadiska viackriteriálneho programovania a je obtiažne ju riešiť.

Uvažujme prípad mean-risk modelu (2.37). V tomto prípade je jasné, že riešenie $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ dominuje riešeniu $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$, ak bude mať lepší očakávaný výnos a zároveň investícia bude menej riziková t.j.

$$E[f(\mathbf{x}, \omega)] \geq E[f(\mathbf{y}, \omega)] \quad \text{a} \quad \rho[f(\mathbf{x}, \omega)] \leq \rho[f(\mathbf{y}, \omega)], \quad (3.4)$$

kde jedna z nerovností je ostrá. Preto namiesto stochasticky nedominovaných riešení by bolo lepšie rátať množinu eficientných riešení.

Otázka, ktorá sa nám potom ponúka je, ako tieto dve množiny riešení spolu súvisia? Z povahy problému je zvyčajne stochasticky nedominovaných riešení viac ako eficientných riešení. Zaujímavé je preto skúmať, či každé eficientné riešenie je zároveň aj stochasticky nedominovaným.

Definícia 12. Hovoríme, že mean-risk model (2.37) je **konzistentný** vzhľadom k stochastickej dominancii \succeq ak $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X}$ platí

$$f(\mathbf{x}, \omega) \succeq f(\mathbf{y}, \omega) \Rightarrow E[f(\mathbf{x}, \omega)] \geq E[f(\mathbf{y}, \omega)] \quad \text{a} \quad \rho[f(\mathbf{x}, \omega)] \leq \rho[f(\mathbf{y}, \omega)]. \quad (3.5)$$

Z definície vidno, že ak mean-risk úloha (2.37) je konzistentná vzhľadom k \succeq , tak potom pre eficientné riešenie \mathbf{x} môže existovať iba také stochasticky dominované riešenie \mathbf{y} vzhľadom k \succeq , ktorého obraz je rovnaký ako \mathbf{x} .

Uvedme si príklad konzistentného a nekonzistentného mean-risk modelu vzhľadom k \succeq_{SSD} . Ak by miera rizika bola meraná rozptylom, tak vzhľadom k \succeq_{SSD} by bol model nekonzistentný. Tento dôsledok nás ani neprekvapuje, lebo obecné rozptyl ako riziková miera je kritizovaná (viď sekciu 1.5 a 1.6). Ak by sme zvolili koherentnú rizikovú mieru $CVAR_\alpha$, tak pre zvolené $\alpha \in [0, 1]$ by sme dostali konzistentný model vzhľadom k dominancii \succeq_{SSD} . Tento záver vyplýva z nasledujúcej vety

Veta 14. Nech X, Y sú náhodné straty definované na merateľnom priestore (Ω, \mathcal{A}) s konečnými prvými absolútnymi momentmi $E|X| < \infty$ a $E|Y| < \infty$. Položme $\tilde{X} = -X$ a $\tilde{Y} = -Y$. Potom platí nasledujúca ekvivalencia

$$\tilde{X} \succeq_{SSD} \tilde{Y} \Leftrightarrow CVAR_\alpha(X) \leq CVAR_\alpha(Y) \quad \text{pre všetky } 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (3.6)$$

Dôkaz. Dôkaz je uvedený v článku (Ogryczak a Ruszczyński, 2001, Veta 3.2). \square

3.2 Stochastická dominancia v obmedzení

Alternatívnym prístupom využitia SD v úlohách stochastického programovania je presunúť nejaké kritériá do oblasti obmedzení nasledujúcim spôsobom

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & E[f(\mathbf{x}, \omega)] \\ \text{z.p} \quad & f(\mathbf{x}, \omega) \succeq Y, \\ & \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

kde Y je náhodná veličina zvolená tak, aby nájdené riešenie následne vyhovovalo kritériám investora. Niekedy sa volí $Y = f(\mathbf{y}, \omega)$ pre nejaké prípustné riešenie $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$. Potom sa hľadajú iba také riešenia $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, že náhodná veličina $f(\mathbf{x}, \omega)$ stochasticky dominuje $f(\mathbf{y}, \omega)$ vzhľadom \succeq . V nasledujúcej sekcii si ukážeme, ako dokážeme nájsť riešenie v takejto úlohe.

3.3 Viacrozmerná stochastická dominancia

Ako už názov tejto sekcie napovedá, tak sa budeme zaoberať viacrozmernou stochastickou dominanciou. Teóriou v tejto problematike sa zaoberali v článku (Dentcheva a Ruszczyński, 2003, Sekcia 7), na ktorú naväzovalo mnoho ďalších prác. Skôr ako začneme, potrebujeme si zadať, čo máme na mysli pod pojmom viacrozmerná SD. Existuje viacero spôsobov, ako sa dá SD pre náhodné veličiny rozšíriť na SD pre náhodné vektory. V nasledujúcej definícii si uvedieme dva rôzne spôsoby, ktoré využívajú **jednorozmernú** úžitkovú funkciu.

Definícia 13. Nech \mathbf{X}, \mathbf{Y} sú náhodné vektory s hodnotami v \mathbb{R}^k . Nech \mathcal{U} je množina úžitkových funkcií $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Definujeme

usporiadanie komponentov : $\mathbf{X} \succeq_{\mathcal{U}}^{komp} \mathbf{Y}$ ak $X_i \succeq_{\mathcal{U}} Y_i$ pre všetky $i \in N_k$

kladné lineárne usporiadanie : $\mathbf{X} \succeq_{\mathcal{U}}^{lin} \mathbf{Y}$ ak $\mathbf{a}^\top \mathbf{X} \succeq_{\mathcal{U}} \mathbf{a}^\top \mathbf{Y}$ pre všetky $\mathbf{a} \geq \mathbf{0}$.

Z vyššie uvedenej definície vidíme, že pri usporiadaní komponentov predpokladáme, že jednotlivé komponenty (t.j. náhodné veličiny X_i pre $i \in N_k$) sú navzájom nezávislé. Naopak v prípade kladného lineárneho usporiadania robíme lineárnu kombináciu jednotlivých komponentov, náhodných veličín X_i s prislúchajúcou váhou $a_i \geq 0$. Týmto postupom dokážeme ohodnotiť, ktoré komponenty majú pre nás väčší význam a zmysel a ktoré nie.

Väčšinou sa množina úžitkových funkcií \mathcal{U} volí ako \mathcal{U}_2 . Podobnou ideou ako v definícii 11 sa potom definuje usporiadanie komponentov v zmysle druhého rádu \succeq_{SSD}^{komp} a kladné lineárne usporiadanie v zmysle druhého rádu \succeq_{SSD}^{lin} .

Ďalším spôsobom ako vieme definovať viacrozmerné usporiadanie pomocou SD je využitím konceptu **viacrozmernej úžitkovej funkcie** a definovaním analogických definícií ako v sekcii 3.1.

Definícia 14. Hovoríme, že $u : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ je viacrozmerná úžitková funkcia, ak je spojitá a neklesajúca na \mathbb{R}^k .

Definícia 15. Nech \mathbf{X}, \mathbf{Y} sú náhodné vektory s hodnotami v \mathbb{R}^k . Hovoríme, že \mathbf{X} dominuje \mathbf{Y} vzhľadom ku generátoru $\mathcal{U}^{[k]}$ (zapisujeme $\mathbf{X} \succeq_{\mathcal{U}^{[k]}} \mathbf{Y}$) ak

$$E[u(\mathbf{X})] \geq E[u(\mathbf{Y})] \quad \forall u \in \mathcal{U}^{[k]} \text{ také, že stredné hodnoty existujú.} \quad (3.8)$$

Definícia 16. Nech \mathbf{X}, \mathbf{Y} sú náhodné vektory s hodnotami v \mathbb{R}^k . Hovoríme, že \mathbf{X} striktne dominuje \mathbf{Y} vzhľadom ku generátoru $\mathcal{U}^{[k]}$ (zapisujeme $\mathbf{X} \succ_{\mathcal{U}^{[k]}} \mathbf{Y}$) ak

$$\begin{aligned} E[u(\mathbf{X})] &\geq E[u(\mathbf{Y})] \quad \forall u \in \mathcal{U}^{[k]} \text{ také, že stredné hodnoty existujú} \& \\ E[u_0(\mathbf{X})] &> E[u_0(\mathbf{Y})] \text{ aspoň pre jednu } u_0 \in \mathcal{U}^{[k]}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Rovnako vieme definovať typy generátorov $\mathcal{U}_1^{[k]}, \mathcal{U}_2^{[k]}, \mathcal{U}_N^{[k]}$ a viacrozmernú stochastickú dominanciu vzhľadom k jednotlivým generátorom $\succeq_{FSD}, \succeq_{SSD}$ a \succeq_{NSD} .

Poznámka. Zápisom $\mathbf{X} \succeq \mathbf{Y}$ resp. $\mathbf{X} \succ \mathbf{Y}$ budeme rozumieť SD resp. striktnú SD vzhľadom k ľubovoľnému typu generátora $\mathcal{U}^{[k]}$. Pre jednoduchosť pri každom spomenutí viacrozmernej SD zakaždým predpokladajme, že stredné hodnoty existujú (alebo odpovedajúce stredné hodnoty existujú).

Pozorný čitateľ si mohol všimnúť, že vhodnou voľbou generátora $\mathcal{U}^{[k]}$ dokážeme nájsť prepojenie medzi $\mathbf{X} \succeq_{\mathcal{U}^{[k]}} \mathbf{Y}$ a $\mathbf{X} \succeq_{\mathcal{U}}^{komp} \mathbf{Y}$ a $\mathbf{X} \succeq_{\mathcal{U}}^{lin} \mathbf{Y}$. Nech $\mathcal{U}^{[k]}$ reprezentuje množinu viacrozmerných úžitkových funkcií v tvare

$$u(\mathbf{X}) = u_1(X_1) + \dots + u_m(X_m), \text{ kde } u_i \in \mathcal{U} \text{ pre } i = 1, \dots, k, \quad (3.10)$$

potom ak platí $\mathbf{X} \succeq_{\mathcal{U}^{[k]}} \mathbf{Y} \Rightarrow \mathbf{X} \succeq_{\mathcal{U}}^{komp} \mathbf{Y}$. Ak by sme naopak uvažovali $\mathcal{U}^{[k]}$ množinu viacrozmerných úžitkových funkcií v tvare

$$u(\mathbf{X}) = \tilde{u}(\mathbf{a}^\top \mathbf{X}), \quad \tilde{u} \in \mathcal{U}, \quad \mathbf{a} \geq \mathbf{0}, \quad (3.11)$$

tak v tomto prípade by platilo $\mathbf{X} \succeq_{\mathcal{U}^{[k]}} \mathbf{Y} \Rightarrow \mathbf{X} \succeq_{\mathcal{U}}^{lin} \mathbf{Y}$. Dôsledkom predošlých poznatkov nás neprekvapí platnosť nasledujúcej vety

Veta 15. Nech \mathbf{X}, \mathbf{Y} sú náhodné vektory s hodnotami v \mathbb{R}^k . Platí pre $j \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{X} \succeq_{\mathcal{U}^{[j]}} \mathbf{Y} \Rightarrow \mathbf{X} \succeq_{\mathcal{U}_j}^{lin} \mathbf{Y} \Rightarrow \mathbf{X} \succeq_{\mathcal{U}_j}^{komp} \mathbf{Y}, \quad (3.12)$$

Dôkaz. Prvá implikácia platí v dôsledku vhodnej voľby úžitkovej funkcie vid' odsek (3.11). Druhá implikácia nadobúda platnosť postupnou voľbou vektora \mathbf{a} . Konkrétne $\mathbf{a}_1 = (1, 0, \dots, 0)^\top$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)^\top, \dots, \mathbf{a}_k = (0, \dots, 0, 1)^\top$. \square

Rovnako ako v stochastických úlohách s jednou účelovou funkciou (3.3) môžeme využiť viacrozmernú stochastickú dominanciu vo viackriteriálnych úlohách. Pripomeňme si problém, ktorým sa zaoberáme

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \{f_1(\mathbf{x}, \omega), f_2(\mathbf{x}, \omega), \dots, f_k(\mathbf{x}, \omega)\} \\ \text{z.p.} \quad & \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

kde \mathcal{X} je uzavretá množina prípustných riešení a účelové funkcie $f_i : \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ závisia na náhodnej zložke $\omega \in \Omega$. Predpokladajme, že poznáme distribučné funkcie náhodných veličín $f_i(\mathbf{x}, \omega)$ pre $i \in N_k$.

Budeme opäť hľadať množinu stochasticky nedominovaných riešení $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$. Povieme, že riešenie $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ stochasticky dominuje riešeniu $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$ ak platí

$$(f_1(\mathbf{x}, \omega), \dots, f_k(\mathbf{x}, \omega)) \succ (f_1(\mathbf{y}, \omega), \dots, f_k(\mathbf{y}, \omega)). \quad (3.14)$$

Potom riešenie $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ je stochasticky nedominované, ak neexistuje také $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$, ktoré by stochasticky dominovalo \mathbf{x} . Vzťah medzi eficientnými riešeniami pri použití viacrozmernej metódy a stochastickými nedominovanými riešeniami opäť smeruje k otázke konzistentnosti.

3.4 Usporiadanie komponentov

V niektorých prípadoch môže byť aj hľadanie stochasticky nedominovaných riešení vzhľadom k $\succeq_{\mathcal{U}^{[k]}}$ obtiažnou úlohou. V dôsledku zjednodušenia úlohy sa preto niekedy hľadajú stochasticky nedominované riešenia vzhľadom k $\succeq_{\mathcal{U}}^{komp}$. Potom vzťah (3.14) dokážeme prepísať do tvaru

$$f_i(\mathbf{x}, \omega) \succeq_{\mathcal{U}} f_i(\mathbf{y}, \omega) \quad \text{pre } i = 1, \dots, k, \quad (3.15)$$

kde aspoň v jednom prípade platí $f_i(\mathbf{x}, \omega) \succ_{\mathcal{U}} f_i(\mathbf{y}, \omega)$. Pri takomto prepise už je výpočtetne jednoduchšie skontrolovať, či je riešenie stochasticky dominované.

Ak by sme uvažovali množinu lineárnych úžitkových funkcií z \mathcal{U}_1 , tak by stačilo overiť pre $i \in N_k$

$$f_i(\mathbf{x}, \omega) \succeq_{\mathcal{U}_1} f_i(\mathbf{y}, \omega) \Leftrightarrow \mathbb{E}[f_i(\mathbf{x}, \omega)] \geq \mathbb{E}[f_i(\mathbf{y}, \omega)]$$

Pre množinu konkávných úžitkových funkcií \mathcal{U}_2 existuje tiež ekvivalentná podmienka, ale je potrebné zainteresovať rizikovú mieru CVaR vid' vetu 14.

3.5 Stochastická dominancia v obmedzení vo viacrozmernom prípade

Uvedme alternatívny prístup na zjednodušenie viackriteriálnej stochastickej úlohy vid' (2.29). Okrem lineárnej kombinácie účelových funkcií je možné pridať podmienku na účelové funkcie do oblasti obmedzení nasledujúcim spôsobom

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^k \lambda_j f_j(\mathbf{x}, \omega)\right] \\ \text{z.p} \quad & \mathbf{f}(\mathbf{x}, \omega) \succeq \mathbf{Y}, \\ & \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \end{aligned} \tag{3.16}$$

kde \mathbf{Y} je náhodný referenčný vektor a $\lambda_j \geq 0$ pre $j \in N_k$. Nás bude zaujímať, ako dokážeme túto úlohu vyriešiť v prípade, že náhodné vektory $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \omega)$ a \mathbf{Y} majú konečný počet scenárov $i = 1, \dots, S$, ktoré nastávajú s rovnakou pravdepodobnosťou $1/S$. Jednotlivé hodnoty, ktoré nadobúdajú náhodné vektory budeme označovať $\mathbf{f}^i(\mathbf{x}) := \mathbf{f}(\mathbf{x}, \omega_i)$ a \mathbf{y}^i pre $i \in N_S$. Uvedieme si prístup, ktorý je uvedený v článku (Armbruster a Luedtke, 2015, Sekcia 2.2), na nájdenie riešenia úlohy (3.16). Trik je v prepísaní úlohy do tvaru

$$\begin{aligned} \text{Max}_{\mathbf{x}, \mathbf{z}^i} \quad & \frac{1}{S} \sum_{i=1}^S \sum_{j=1}^k \lambda_j f_j(\mathbf{x}, \omega_i) \\ \text{z.p} \quad & \mathbf{f}^i(\mathbf{x}) \geq \mathbf{z}^i \quad \forall i \in N_S, \\ & \mathbf{Z} \succeq \mathbf{Y}, \\ & \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \end{aligned} \tag{3.17}$$

kde \mathbf{z}^i sú rozhodovacie premenné. Tento postup nám vytvára novú formuláciu stochastickej dominancie $\mathbf{Z} \succeq \mathbf{Y}$, kde \mathbf{Z} ma diskkrétne rozdelenie s pravdepodobnosťou $\mathcal{P}[\mathbf{Z} = \mathbf{z}^i] = \mathcal{P}[\mathbf{f}(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{f}^i(\mathbf{x})]$. Ak by sme uvažovali, že stochastická dominancia je braná v zmysle FSD (\succeq_{FSD}), tak obmedzenia v úlohe (3.17) vieme preformulovať na lineárne obmedzenia s celočíselnými premennými. V prípade dominancie v zmysle SSD (\succeq_{SSD}), vieme opäť stochastickú dominanciu prepísať na lineárnu podmienku. Tento poznatok vyplýva z dôsledku platnosti nasledujúcich ekvivalencií

- $\mathbf{Z} \succeq_{FSD} \mathbf{Y} \Leftrightarrow$ existujú $p_{ij} \in \{0, 1\}$ pre všetky $i, j \in N_S$ také, že platí

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^S p_{ij} &= 1 \quad \forall i \in N_S, \\
\sum_{i=1}^S p_{ij} &= 1 \quad \forall j \in N_S, \\
\sum_{i=1}^S \mathbf{y}^i p_{ij} &\leq \mathbf{z}^j \quad \forall j \in N_S
\end{aligned} \tag{3.18}$$

- $\mathbf{Z} \succeq_{SSD} \mathbf{Y} \Leftrightarrow$ existujú $p_{ij} \geq 0$ pre všetky $i, j \in N_S$, ktoré spĺňajú (3.18).

Ekvivalencie uvedené v (3.18) sú dokázané v článku (Armbruster a Luedtke, 2015, Apendix). Poznamenajme, že podmienky úzko súvisia s podmienkami v príklade (3.1). Zabezpečujú nám porovnanie korešpondujúcich hodnôt. V numerickej časti si ukážeme, ako dokážeme využiť stochastickú dominanciu 1. a 2. rádu s využitím vyššie uvedeného faktu v úlohe optimalizácie portfólia.

Poznámka. Všimnime si, že riešením úlohy (3.17) dostaneme len jedno optimálne riešenie \mathbf{x}^* , ktoré je v určitom zmysle to najlepšie. Nebude existovať $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$, pre ktoré by platilo $\mathbf{f}^i(\mathbf{y}) \geq \mathbf{f}^i(\mathbf{x}^*)$ pre $\forall i \in N_S$ a by malo väčšiu hodnotu účelovej funkcie. Obecný postup na nagerovanie všetkých stochasticky nedominovaných riešení by bol komplikovanejší a časovo náročnejší.

4. Numerické štúdie

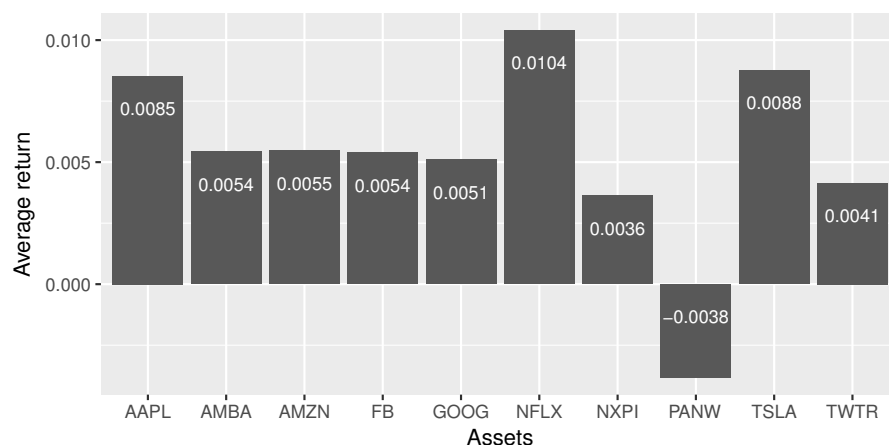
V tejto kapitole si ukážeme na reálnych dátach rôzne techniky, ktoré sme popísali v predošlých kapitolách. Budeme sa zaoberať optimalizáciou portfólia. Portfólio bude vytvorené rozložením jednotkového kapitálu do desiatich akcií, s ktorými sa obchoduje na americkej burze v New Yorku. V nasledujúcej tabuľke si uvedme názvy spoločností, u ktorých sme akcie skúmali.

Názov spoločnosti	Skratka	Priemysel
Apple	AAPL	Electronic Equipment
Amarella	AMBA	Semiconductor Equipment and Materials
Amazon	AMZN	Catalog and Mail Order Houses
Facebook	FB	Internet Information Providers
Alphabet	GOOG	Internet Information Providers
Netflix	NFLX	CATV Systems
NXP Semiconductors	NXPI	Semiconductor - Broad Line
Palo Alto Networks	PANW	Networking and Communication Devices
Tesla	TSLA	Auto Manufacturers - Major
Twitter	TWTR	Internet Information Providers

Poznámka: * Dáta boli stiahnuté z <https://finance.yahoo.com/>.

Tabuľka 4.1: Zoznam spoločností, u ktorých sa akcie skúmajú.

Z danej webovej stránky sme si stiahli a následne dorátali týždenné výnosy za obdobie od 1.6.2016 do 31.4.2017 (viď Prílohy). Dokopy sme mali k dispozícii 47 výnosov (scenárov). Priemerné hodnoty výnosov za jednotlivé aktíva si môžeme všimnúť na nasledujúcom obrázku.



Obr. 4.1: Priemerné týždenné výnosy aktív.

Ak by nám išlo iba o optimalizáciu portfólia s cieľom maximalizovať zisk bez ohľadu na ostatné okolnosti, tak by sme kapitál investovali do Netflixu. V praxi sa rozhodujeme aj na základe veľkosti rizika, ktoré podstupujeme pri danej investícii. Optimalizovať portfólio preto budeme v zmysle mean-risk modelov.

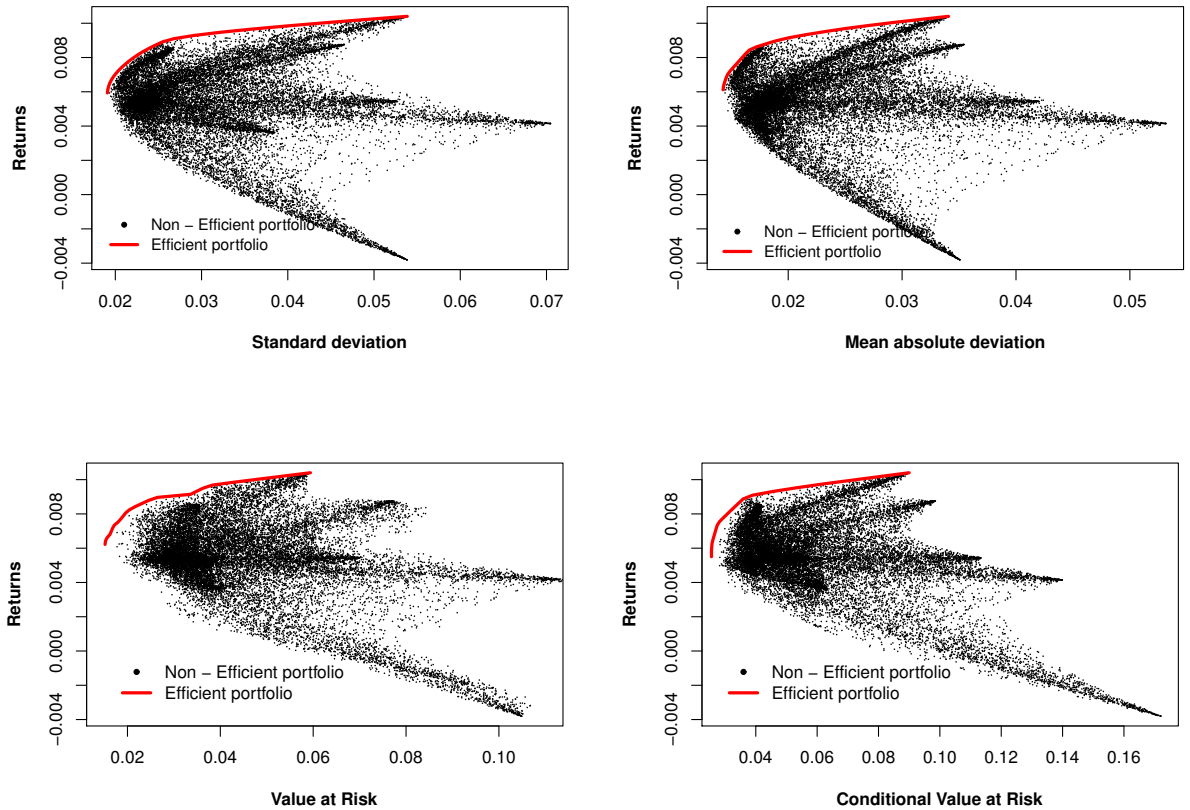
4.1 Postup pri hľadaní efficientných riešení

Pri hľadaní efficientných riešení sme využívali optimalizačný softvér GAMS, v ktorom sme riešili úlohu pre známy vektor scenárov $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}^1, \dots, \tilde{\xi}^{47})$

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & L(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) \\ \text{z.p} \quad & \frac{1}{47} \sum_{i=1}^{47} \mathbf{x}^\top \tilde{\xi}^i \geq r_{\min}, \\ & \mathbf{1}^\top \mathbf{x} = 1, \mathbf{x} \geq 0, \end{aligned} \tag{4.1}$$

kde funkcia $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ je v tomto prípade definovaná na $\mathbb{R}^{10} \times \mathbb{R}^{47}$ (10 aktív a 47 známych scenárov). Miera rizika bola meraná rozptylom, priemernou absolútnou odchýlkou (MAD), hodnotou v riziku (VaR) a podmienenou hodnotou v riziku vid' modely (2.7), (2.13), (2.16) a (2.19). V modeli predpokladáme, že každý scenár môže nastať s rovnakou pravdepodobnosťou. Pre každý model sme zvolili 25 rozumných minimálnych výnosov r_{\min} a našli riešenie pomocou solverov implementovaných v GAMS-e na riešenie nelineárnych a lineárnych úloh.

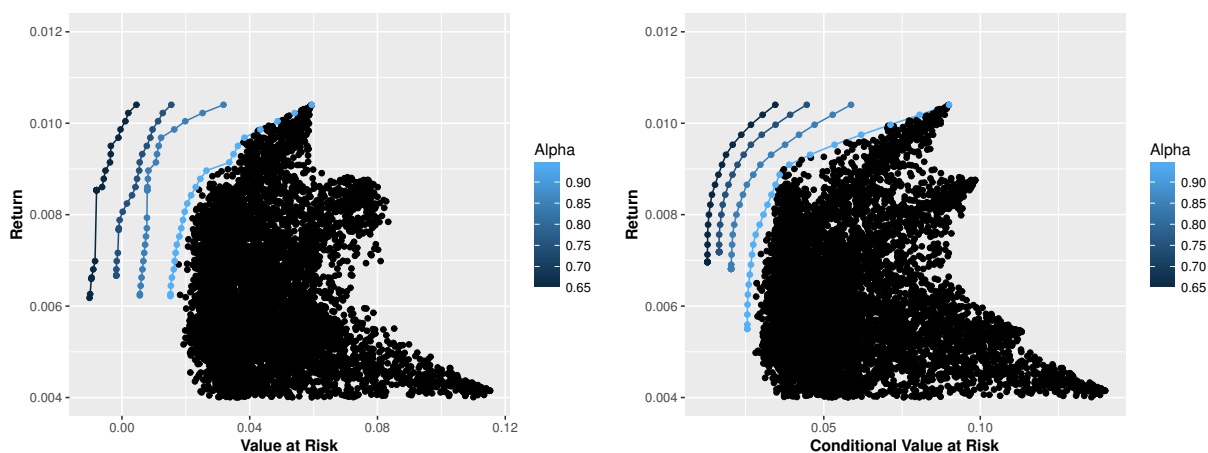
V nasledujúcom grafe sú vykreslené efficientné riešenia spojené lineárnou lomenou čiarou pre každú mieru rizika. Spolu s efficientnými riešeniami sme do obrázka 4.2 pridali 20 000 náhodne vygenerovaných portfólií (viď Prílohy) s dorátaným očakávaným výnosom (os y) a rizikom (os x). Tieto riešenia označujeme ako neeficientné. Názvy popiskov v obrázkoch budeme písať v angličtine.



Obr. 4.2: Efficientné a neeficientné portfóliá v mean-risk modeli.

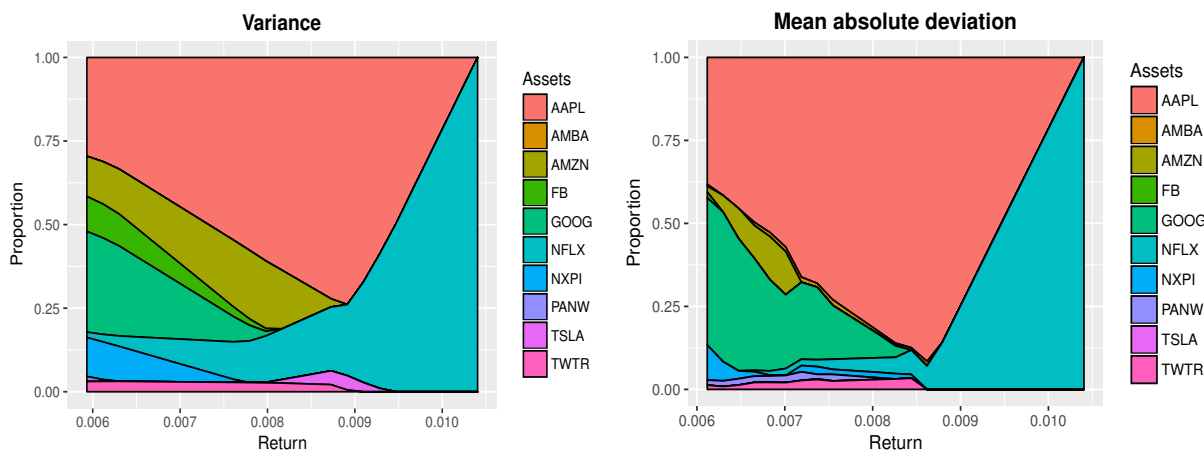
Z obrázkov vidíme, že efektívne riešenia sú práve tie, pre ktoré nedokážeme nájsť portfólio s väčším výnosom a s menším rizikom. Preto hranica skonštruovaná z efektívnych riešení je sústredená vľavo hore.

Podotknime, že v prvom obrázku vykresľujeme namiesto rozptylu smerodajnú odchýlku $\sqrt{\mathbf{x}^\top \mathbf{V} \mathbf{x}}$, kde \mathbf{V} je kovariančná matica výnosov. V prípade VaR a CVaR sme zvolili $\alpha = 0.95$. Zaujímavé by bolo, ako by sa hranica efektívnych riešení posunula v prípade rozličnej voľby. Na nasledujúcom obrázku zobrazujeme dorátané hranice pre $\alpha \in \{0.65, 0.75, 0.85, 0.95\}$.



Obr. 4.3: Vykreslenie efektívnych portfólií pri zmene parametru α .

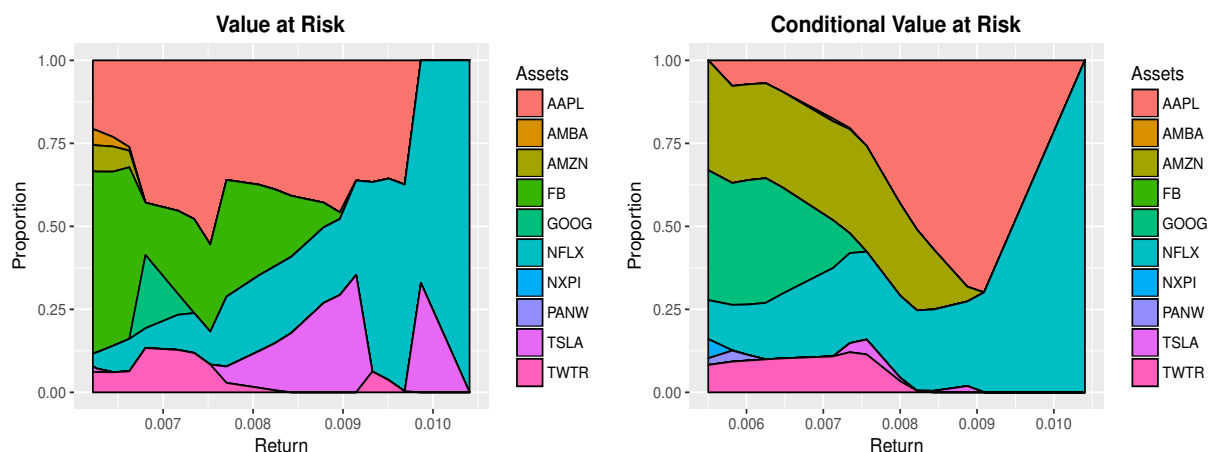
Z obrázku 4.3 vidíme, že sa hranica efektívnych riešení posúva smerom k y-ovej osi. Tento poznatok nás nemusí prekvapovať, lebo pre menšie hodnoty α sú hodnoty VaR a CVaR z definície menšie. Teraz sa podme pozrieť na rozloženie kapitálu do jednotlivých aktív v efektívnych prípadoch pre každú rizikovú mieru.



Obr. 4.4: Optimálne rozloženie akcií (os y) v efektívnych portfóliách podľa očakávaného výnosu (os x) pre riziko merané rozptylom a MAD.

Farebne odlišujeme, akú časť kapitálu máme investovať do jednotlivých akcií (viď legendu Assets). Rovnako ako z obrázka 4.1 vyplýva, že ak chceme mať čo najväčší očakávaný výnos bez ohľadu na postupované riziko, tak by sme mali investovať kapitál do akcií Netflixu. Všimnime si, že pre rozličnú voľbu rizikovej miery vyzerajú obrázky skoro podobne. Pomerne veľkú časť kapitálu sa odporúča investovať do Applu.

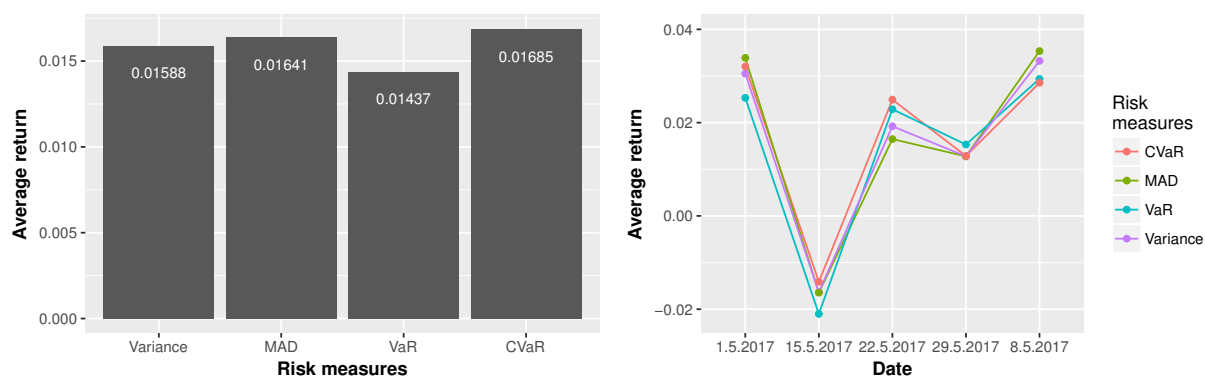
Teraz sa pozrime, ako by vyzeralo optimálne rozloženie kapitálu, ak by sme sa riadili rizikovými mierami VaR a CVaR pri hodnote parametru $\alpha = 0.95$.



Obr. 4.5: Optimálne rozloženie akcií v eficientných portfóliách podľa očakávaného výnosu pre riziko merané VaR a CVaR s parametrom $\alpha = 0.95$.

Vidíme, že pri využití rizikovej miery CVaR dostávame podobný graf ako v obrázku 4.4. Viditeľný rozdiel nastáva v prípadoch, v ktorých sme nastavili malú hodnotu minimálneho výnosu. Odporúča sa investovať viac do akcií Amazonu a Netflixu na úkor Applu. Pri použití rizikovej miery VaR vyzerá optimálne rozloženie pomerne „divoko“. Oproti ostatným grafom odporúčajú pri malom očakávanom výnose investovať aj do Facebooku a naopak pri väčšom očakávanom výnose investovať časť kapitálu do Tesly.

Vyskúšajme investovať kapitál podľa doporučeného optimálneho rozloženia u 25 eficientných portfólií pre každú rizikovú mieru. Dopočítajme priemerný výnos, ktorý by sme obdržali za budúce obdobie 1.5.2017 - 31.5.2017 (5 známych týždenných výnosov). Z nasledujúceho obrázka vidíme, že ak by sme ako mieru rizika uvažovali podmienenú hodnotu v riziku s parametrom $\alpha = 0.95$, tak by sme obdržali najväčší výnos (0.01685).



Obr. 4.6: Priemerný výnos eficientných portfólií (os y) za celý mesiac (ľavý obr.) a po jednotlivých týždňoch (pravý obr.) pre jednotlivé rizikové miery ($\alpha = 0.95$).

Samozrejme tieto výsledky treba brať len s rezervou, lebo v inom prípade by bolo vhodné využiť inú rizikovú mieru. Pre dôveryhodnejšie výsledky by sme potrebovali skúmať dlhšie obdobie s vyšším počtom scenárov.

4.2 Postup pri úlohe so SD v obmedzení

V predošlej kapitole sme načrtli postup, ako môžeme nájsť riešenie úlohy (3.17), v ktorej sa vyskytuje viacrozmerná stochastická dominancia v oblasti obmedzení. Pre zjednodušenie výpočtov sa budeme zaoberať jednorozmernou stochastickou dominanciou. Naďalej budeme optimalizovať portfólio s desiatimi aktívami uvedenými na začiatku kapitoly 4. Oproti modelu (4.1) budeme maximalizovať zisk, ako je uvedené v nasledujúcej úlohe, ktorá je inšpirovaná článkom (Armbruster a Luedtke, 2015, Sekcia 5)

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \sum_{i=1}^{10} \mathbb{E}[R_i]x_i \\ \text{z.p} \quad & \sum_{i=1}^{10} R_i x_i \succeq Y, \\ & \mathbf{1}^\top \mathbf{x} = 1, \mathbf{x} \geq 0, \end{aligned} \tag{4.2}$$

kde R_i reprezentujú náhodné výnosy jednotlivých aktív a Y je náhodná referenčná veličina. Napozorovali sme 47 scenárov $\tilde{\xi}^i$ pre jednotlivé aktíva s výnosom $f^i(\mathbf{x}) := \mathbf{x}^\top \tilde{\xi}^i$ viď (3.17). Predpokladajme, že každý z nich nastáva s pravdepodobnosťou $1/47$. Scenáre pre referenčný vektor dorátame nasledovne

$$y^j = b^j - \delta \left(\frac{1}{47} \sum_{i=1}^{47} b^i \right), \quad \text{kde} \quad b^j = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \tilde{\xi}_i^j \quad \text{pre } j \in N_{47}. \tag{4.3}$$

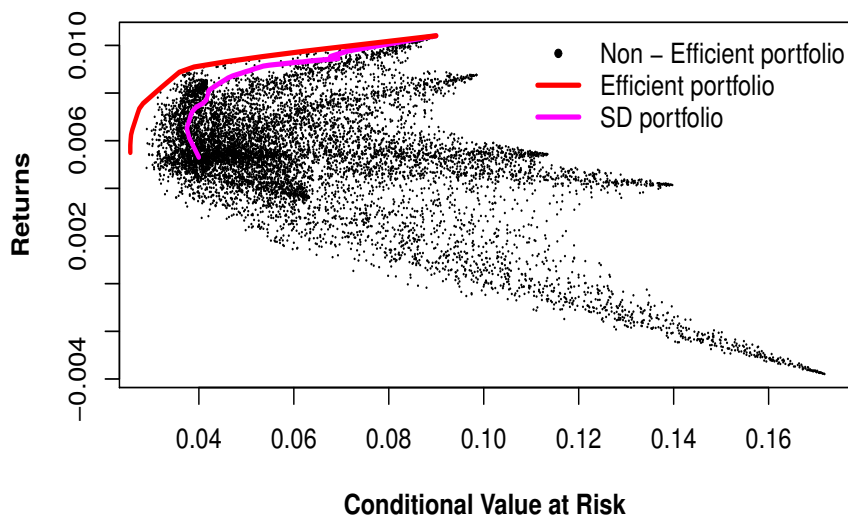
Parameter δ nastavuje hranicu pre požadovaný priemerný výnos. Reguluje sa ním vzdialenosť od priemerného výnosu za jednotlivé aktíva v každom scenári.

Ak budeme brať stochastickú dominanciu v zmysle FSD, potom na základe poznatku uvedeného v (3.18) môžeme v úlohe (4.2) nájsť riešenie vyriešením nasledujúceho modelu

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \frac{1}{47} \sum_{i=1}^{47} \mathbf{x}^\top \tilde{\xi}^i \\ \text{z.p} \quad & \mathbf{x}^\top \tilde{\xi}^i \geq z^i \quad \forall i \in N_{47}, \\ & \sum_{i=1}^{47} y^i p_{ij} \leq z^j \quad \forall j \in N_{47}, \\ & \sum_{j=1}^{47} p_{ij} = 1 \quad \forall i \in N_{47}, \\ & \sum_{i=1}^{47} p_{ij} = 1 \quad \forall j \in N_{47}, \\ & p_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \mathbf{1}^\top \mathbf{x} = 1, \quad \mathbf{x} \geq 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

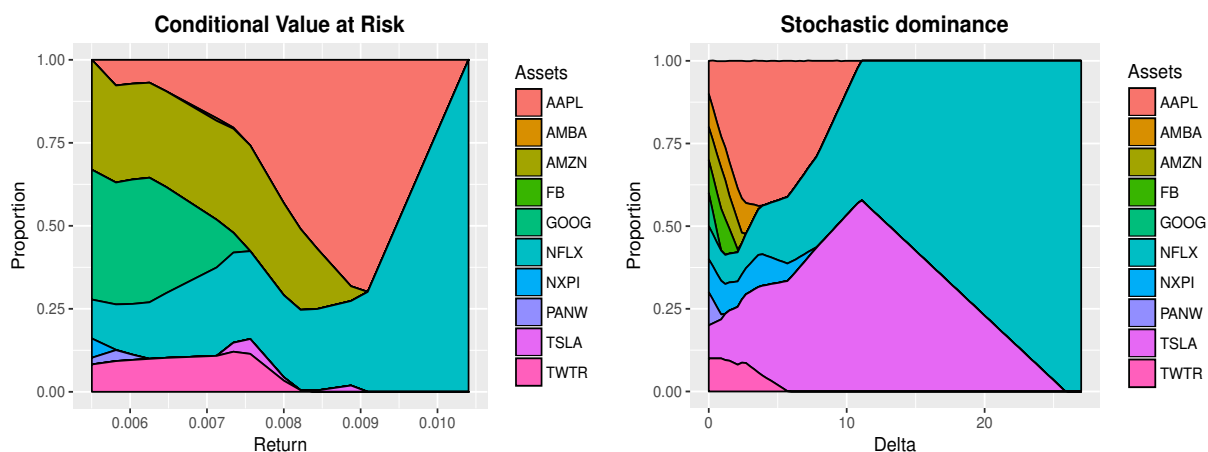
Zvolili sme 91 rôznych hodnôt parametra $\delta = 0, 0.3, 0.6, \dots, 27$. Čím je hodnota parametra väčšia, tým pripúšťame aj viac riešení. Pre porovnanie s eficientnými riešeniami z úlohy (4.1) sme pre 81 riešení z úlohy (4.4) (označme ich ako SD portfóliá) dorátali hodnotu CVaR pre $\alpha = 0.95$.

Na nasledujúcom obrázku vykreslíme eficientné portfóliá spolu so SD portfóliami. Pôjde o rozšírenie obrázka 4.2 o SD portfóliá s dorátaným výnosom a hodnotou rizika.



Obr. 4.7: Porovnanie eficientných a neeficientných portfólií s optimálnymi portfóliami v úlohe so stochastickou dominanciou.

Poznamenajme, že uvádzame prípad, kedy riziko bolo merané podmienenou hodnotou v riziku pre parameter $\alpha = 0.95$. Z vyššie uvedeného obrázka si môžeme všimnúť, že pre vyššie hodnoty δ sa SD portfóliá približujú k eficientným. Je to dôsledkom faktu, že pre veľké δ nás hlavne zaujímajú riešenia \mathbf{x} splňujúce $\mathbf{1}^\top \mathbf{x} = 1, \mathbf{x} \geq 0$, ktoré maximalizujú zisk. Na záver vykreslíme rozloženie akcií v SD portfóliách v závislosti na δ (os x).



Obr. 4.8: Porovnanie optimálneho rozloženia akcií v úlohách s CVaR a Stochastickou dominanciou.

Na prvý pohľad vidíme, že obrázky, ktoré zobrazujú optimálne rozloženie akcií, vyzerajú odlišne. Je to z dôsledku použitia rôznych prístupov, ale určitú logiku v sebe zachovávajú. Ako bolo už spomenuté, tak pre δ z intervalu $[10, 27]$ nám ide poväčšine o maximalizáciu zisku, a preto sa odporúča investovať do Netflixu

a Tesly. Pre malé hodnoty δ z intervalu $[0, 5]$ sa odporúča rovnomerne rozdeliť náš kapitál do všetkých akcií s prevládajúcou investíciou do Applu.

Obecne nejde povedať so 100 % istotou, aké δ je vhodné voliť. Taktiež otázne je, či je lepšie využiť metódu minimalizovania rizikovej miery s podmienkou na očakávaný zisk alebo metódu s maximalizáciou zisku s podmienkami na nájdené riešenia pri využití stochastickej dominancie. Rozhodnutie závisí na preferencií investora, ktorá metóda pri danej investícii splňuje jeho požadované kritériá.

Mohli by sme sa ešte zaoberať otázkou, aké SD portfóliá by sme nagenerovali ak by sme v úlohe (4.2) brali stochastickú dominanciu v zmysle SSD. Tým by sme v úlohe (4.4) museli zameniť binárnu podmienku $p_{ij} \in \{0, 1\}$ na podmienku $p_{ij} \in [0, 1]$. Bohužiaľ v našom jednorozmernom prípade by sme dostali obdobné riešenia a veľké zmeny by nenastali. Preto príslušné obrázky a výsledky pre túto úlohu neuvádzame. Na záver poznamenajme, že ak by sme uvažovali konzistentný mean–risk model vid' definíciu (3.5), tak pri generovaní stochasticky nedominovaných riešení by sme nagenerovali eficientné riešenia.

Ak by čitateľa zaujímali výsledky pre viacrozmernú stochastickú dominanciu pri využití metódy popísanej v sekcii 3.5, dovoľujeme si odkázať na numerické štúdie v článku (Armbruster a Luedtke, 2015, Sekcia 5).

Záver

V tejto diplomovej práci sme popísali stochastické úlohy, s ktorými sa môžeme stretnúť v literatúre. Hlavnú pozornosť sme venovali úlohám nezávislým na pravdepodobnostnej miere, viackriteriálnym úlohám a úlohám so stochastickou dominanciou. Pokúšali sme sa neistotu odhadnúť strednou hodnotou a v úlohách sme maximalizovali očakávaný výnos alebo minimalizovali riziko straty. V numerickej časti sme ukázali na napozorovaných scenároch, ako tieto prístupy vieme aplikovať v úlohe optimalizácie portfólia na nájdenie rozumných riešení.

Teória za stochastickým programovaním je veľmi rozšírená, a preto existuje mnoho ďalších metód na nájdenie zmysluplných riešení. Za zmienku stoja viacstupňové stochastické metódy, dynamické metódy alebo paralelná optimalizácia, o ktorých sme v práci podrobnejšie nepísali, ale existuje mnoho zdrojov na internete, kde si čitateľ o nich môže viac prečítať.

Zoznam použitej literatúry

- ARMBRUSTER, B. a LUEDTKE, J. (2015). Models and formulations for multi-variate dominance constrained stochastic programs. *IIE Transactions*, **47**(1), 1–14.
- ARTZNER, P., DELBAEN, F., EBER, J.-M. a HEATH, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, **9**(3), 203–228.
- DANTZIG, G. B. (1955). Linear programming under uncertainty. *Management Science*, **1**(3, 4), 197–206.
- DENTCHEVA, D. a RUSZCZYNSKI, A. (2003). Optimization with stochastic dominance constraints. *SIAM Journal on Optimization*, **14**(2), 548–566.
- DENTCHEVA, D., PENEV, S. a RUSZCZYNSKI, A. (2016). Statistical estimation of composite risk functionals and risk optimization problems. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, pages 1–24.
- DRÁBKOVÁ, A. (2007). *VaR a jiné míry rizika*. Bakalářská práce, Univerzita Karlova v Praze, Praha.
- DUPAČOVÁ, J. (1986). *Stochastické programování*. Ministerstvo školství ČSR, Praha.
- DUPAČOVÁ, J., HURT, J. a ŠTĚPÁN, J. (2002). *Stochastic modeling in economics and finance*. Kluwer Academic Publisher, Dordrecht. ISBN 1-4020-0840-6.
- EHRGOTT, M. (2005). *Multicriteria Optimization*. Second Edition. Springer, Berlin, Heidelberg. ISBN 3-540-21398-8.
- ERMOLIEV, Y. M. a NORKIN, V. I. (2013). Sample average approximation method for compound stochastic optimization problems. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, **23**(4), 2231–2263.
- GUTJAHR, W. J. a PICHLER, A. (2016). Stochastic multi-objective optimization: a survey on non-scalarizing methods. *Annals of Operations Research*, **236**(2), 475–499.
- KAŇKOVÁ, V. (2013). Risk measures in optimization problems via empirical estimates. *Czech Economic Review*, **7**(3), 162–177.
- KOPA, M. (2006). *Utility functions in portfolio optimization*. Disertační práce, Univerzita Karlova v Praze, Praha.
- LAPŠANSKÁ, A. (2014). *Úlohy viacstupňového stochastického programování - dekompozice*. Diplomová práce, Univerzita Karlova v Praze, Praha.
- LEVY, H. (2006). *Stochastic dominance: Investment decision making under uncertainty*. Second Edition. Springer Science, New York. ISBN 80-7378-001-1.
- MALÁ, A. (2012). *Vícekriteriální optimalizace portfolia*. Bakalářská práce, Univerzita Karlova v Praze, Praha.

- MARKOWITZ, H. M. (1952). Portfolio selection. *Journal of Finance*, **7**(1), 77–91.
- NIKULIN, Y., MIETTINEN, K. a MÄKELÄ, M. (2012). A new achievement scalarizing function based on parameterization in multiobjective optimization. *Operations Research-Spektrum*, **34**(1), 69–87.
- OGRYCAK, W. a RUSZCZYŃSKI, A. (2001). On consistency of stochastic dominance and mean-semideviation models. *Mathematical programming series B*, **89**(2), 217–232.
- PRÉKOPA, A. (1971). Logarithmic concave measures with application to stochastic programming. *Acta Scientiarum Mathematicarum*, **32**, 301–316.
- ROCKAFELLER, R. T. a URYASEV, S. (2002). Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of banking and finance*, **26**, 1443–1471.
- RUIZ, F., LUQUE, M., MIGUEL, F. a MUÑOZ, M. D. M. (2008). An additive achievement scalarizing function for multiobjective programming problems. *European Journal of Operational Research*, **188**(3), 683–694.
- SHAPIRO, A., DENTCHEVA, D. a RUSZCZYŃSKI, A. (2014). *Lectures on Stochastic Programming: Modeling and Theory*. Second Edition. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia. ISBN 978-1-611973-42-6.

Zoznam obrázkov

4.1	Priemerné týždenné výnosy aktív.	35
4.2	Eficientné a neeficientné portfóliá v mean-risk modeli.	36
4.3	Vykreslenie efficientných portfólií pri zmene parametru α	37
4.4	Optimálne rozloženie akcií (os y) v efficientných portfóliách podľa očakávaného výnosu (os x) pre riziko merané rozptylom a MAD. .	37
4.5	Optimálne rozloženie akcií v efficientných portfóliách podľa očakávaného výnosu pre riziko merané VaR a CVaR s parametrom $\alpha = 0.95$	38
4.6	Priemerný výnos efficientných portfólií (os y) za celý mesiac (ľavý obr.) a po jednotlivých týždňoch (pravý obr.) pre jednotlivé rizikové miery ($\alpha = 0.95$).	38
4.7	Porovnanie efficientných a neeficientných portfólií s optimálnymi portfóliami v úlohe so stochastickou dominanciou.	40
4.8	Porovnanie optimálneho rozloženia akcií v úlohách s CVaR a Stochastickou dominanciou.	40

Zoznam tabuliek

1.1	Rizikové miery.	13
1.2	Koherentné vlastnosti rizikových mier.	14
4.1	Zoznam spoločností, u ktorých sa akcie skúmajú.	35

Zoznam použitých skratiek

SP	stochastické programovanie
$z.p.$	za podmienok
Max	maximum
Min	minimum
(Ω, \mathcal{A}, P)	pravdepodobnostný priestor
\mathcal{X}	množina prípustných riešení
$(\cdot)^+$,	$\max\{0, \cdot\}$
$E_P(X)$	stredná hodnota náhodnej veličiny X vzhľadom k pravdepodobnostnému rozdeleniu P
\mathbb{R}_+	množina kladných reálnych čísiel
$\mathbf{1}$	jednotkový vektor
\mathbf{A}^\top	transponovaná matica \mathbf{A}
var	rozptyl
sd	smerodajná odchýlka
sv	semi-variancia
MAD	priemerná absolútna odchýlka
VaR	hodnota v riziku
$CVaR$	podmienená hodnota v riziku
r_{min}	minimálny požadovaný výnos
$[a, b]$	uzavretý interval s koncovými hodnotami a, b
x^*	optimálne riešenie úlohy
\hat{x}	eficientné riešenie úlohy
tzv.	takzvaný
obr.	obrázok
t. j.	to jest (to znamená)
N_k	množina indexov $\{1, \dots, k\}$
SD	stochastická dominancia
\succ, \succeq	symboly pre stochastickú dominanciu
$R(a, b)$	rovnorné rozdelenie na intervale (a, b)
$N(\mu, \sigma^2)$	normálne rozdelenie so strednou hodnotou μ a rozptylom σ^2

Prílohy

Dopočítané výnosy aktív a ich priemerný výnos

AVG return 0.0085 0.0054 0.0055 0.0054 0.0051 0.0104 0.0036 -0.0038 0.0088 0.0041

Skratka skúmanej spoločnosti										
Date	AAPL	AMBA	AMZN	FB	GOOG	NFLX	NXPI	PANW	TSLA	TWTR
06.06.2016	0.0093	0.1063	-0.0105	-0.0156	-0.0041	-0.0586	-0.0395	-0.0600	-0.0009	-0.0776
13.06.2016	-0.0354	0.0239	-0.0160	-0.0309	-0.0385	0.0075	-0.0386	-0.0226	-0.0152	0.1484
20.06.2016	-0.0202	-0.0589	-0.0105	-0.0083	-0.0239	-0.0636	-0.0582	-0.0508	-0.1036	0.0211
27.06.2016	0.0267	0.0230	0.0382	0.0188	0.0355	0.0931	-0.0262	-0.0058	0.1209	0.0511
04.07.2016	0.0082	0.0614	0.0277	0.0267	0.0092	0.0040	0.0151	0.0402	0.0013	0.0463
11.07.2016	0.0217	0.0229	-0.0139	-0.0032	0.0202	0.0137	0.0067	-0.0180	0.0167	0.0000
18.07.2016	-0.0012	0.0187	0.0128	0.0354	0.0318	-0.1270	0.0592	0.0471	0.0085	0.0160
25.07.2016	0.0563	0.0344	0.0187	0.0243	0.0351	0.0624	-0.0037	0.0108	0.0563	-0.0942
01.08.2016	0.0314	0.0105	0.0094	0.0098	0.0175	0.0633	0.0196	0.0068	-0.0203	0.0974
08.08.2016	0.0065	0.0939	0.0086	-0.0022	0.0013	-0.0045	0.0034	-0.0349	-0.0192	0.0701
15.08.2016	0.0109	0.0144	-0.0197	-0.0106	-0.0100	-0.0075	0.0273	0.0752	-0.0027	-0.0287
22.08.2016	-0.0221	0.0611	0.0154	0.0113	-0.0076	0.0178	0.0012	0.0288	-0.0223	-0.0358
29.08.2016	0.0074	-0.0288	0.0045	0.0124	0.0025	-0.0021	-0.0038	0.0320	-0.1010	0.0683
05.09.2016	-0.0427	-0.0519	-0.0159	0.0047	-0.0153	-0.0090	-0.0766	-0.0053	-0.0167	-0.0737
12.09.2016	0.1143	0.0738	0.0242	0.0155	0.0121	0.0309	0.0289	0.0325	0.0562	0.0552
19.09.2016	-0.0192	-0.0169	0.0350	-0.0086	0.0234	-0.0356	0.0018	0.0142	0.0100	0.1837
26.09.2016	0.0030	0.0978	0.0392	0.0024	-0.0122	0.0272	0.2159	0.0536	-0.0165	0.0190
03.10.2016	0.0089	-0.0512	0.0025	0.0056	-0.0028	0.0636	0.0096	0.0037	-0.0364	-0.1388
10.10.2016	0.0313	-0.1024	-0.0196	-0.0086	0.0045	-0.0320	-0.0154	-0.0590	-0.0005	-0.1496
17.10.2016	-0.0088	-0.0040	-0.0048	0.0328	0.0268	0.2565	0.0031	-0.0021	0.0182	0.0717
24.10.2016	-0.0247	-0.0186	-0.0521	-0.0059	-0.0050	-0.0073	-0.0190	0.0095	-0.0006	-0.0238
31.10.2016	-0.0429	-0.0550	-0.0274	-0.0803	-0.0419	-0.0359	-0.0108	-0.0237	-0.0471	0.0204
07.11.2016	-0.0038	0.0302	-0.0212	-0.0143	-0.0105	-0.0594	-0.0098	0.0541	-0.0105	0.0294
14.11.2016	0.0150	0.0372	0.0286	-0.0168	0.0086	0.0037	0.0118	0.0342	-0.0188	0.0097
21.11.2016	0.0157	0.0231	0.0266	0.0287	0.0015	0.0191	0.0064	-0.1230	0.0629	-0.0358
28.11.2016	-0.0169	-0.1396	-0.0513	-0.0414	-0.0147	0.0290	-0.0155	-0.1049	-0.0772	-0.0072
05.12.2016	0.0369	-0.0002	0.0383	0.0371	0.0517	0.0171	0.0037	0.0269	0.0590	0.0959
12.12.2016	0.0177	-0.0083	-0.0142	0.0016	0.0019	0.0109	-0.0116	-0.0058	0.0536	-0.0519
19.12.2016	0.0047	0.0268	0.0037	-0.0217	-0.0011	0.0110	0.0104	-0.0148	0.0536	-0.1143
26.12.2016	-0.0060	-0.0240	-0.0141	-0.0189	-0.0229	-0.0143	-0.0019	-0.0184	0.0016	-0.0121
02.01.2017	0.0180	0.0091	0.0615	0.0727	0.0445	0.0587	0.0020	0.0800	0.0717	0.0534
09.01.2017	0.0096	-0.0546	0.0266	0.0399	0.0021	0.0201	0.0017	0.0254	0.0382	0.0047
16.01.2017	0.0081	-0.0538	-0.0108	-0.0101	-0.0035	0.0366	-0.0059	0.0262	0.0294	-0.0388
23.01.2017	0.0163	0.0248	0.0339	0.0405	0.0227	0.0278	0.0008	0.0216	0.0336	-0.0006
30.01.2017	0.0585	0.0302	-0.0306	-0.0091	-0.0265	-0.0154	0.0161	0.0402	-0.0064	0.0628
06.02.2017	0.0236	0.0570	0.0213	0.0245	0.0152	0.0326	0.0254	0.0283	0.0712	-0.1153
13.02.2017	0.0272	0.0174	0.0213	-0.0049	0.0177	-0.0180	0.0040	-0.0034	0.0111	0.0668
20.02.2017	0.0069	0.0588	0.0002	0.0143	0.0007	0.0072	0.0042	-0.0113	-0.0559	-0.0385
27.02.2017	0.0228	-0.0533	0.0055	0.0128	0.0005	-0.0287	0.0100	-0.2448	-0.0211	-0.0144
06.03.2017	-0.0046	-0.0504	0.0030	0.0118	0.0171	0.0126	0.0035	0.0288	-0.0313	-0.0400
13.03.2017	0.0061	0.0670	-0.0002	0.0076	0.0105	0.0300	-0.0091	-0.0258	0.0731	-0.0026
20.03.2017	0.0046	-0.0293	-0.0079	0.0036	-0.0442	-0.0213	-0.0027	-0.0349	0.0063	0.0040
27.03.2017	0.0215	0.0004	0.0484	0.0122	0.0186	0.0408	0.0050	0.0081	0.0575	-0.0126
03.04.2017	-0.0022	-0.0033	0.0094	-0.0089	-0.0059	-0.0318	0.0101	-0.0043	0.0871	-0.0441
10.04.2017	-0.0160	-0.0701	-0.0114	-0.0099	-0.0013	-0.0013	-0.0126	0.0001	0.0048	0.0007
17.04.2017	0.0086	0.0521	0.0157	0.0308	0.0238	-0.0004	0.0109	-0.0326	0.0053	0.0231
24.04.2017	0.0097	0.0538	0.0294	0.0457	0.0744	0.0653	0.0133	-0.0013	0.0277	0.1265

Dopočítané výnosy v budúcom období

Skratka skúmanej spoločnosti										
Date	AAPL	AMBA	AMZN	FB	GOOG	NFLX	NXPI	PANW	TSLA	TWTR
01.05.2017	0.0370	0.0359	0.0099	-0.0001	0.0234	0.0289	0.0078	0.0729	-0.0182	0.1341
08.05.2017	0.0479	0.0288	0.0291	0.0006	0.0055	0.0269	0.0027	0.0013	0.0534	-0.0043
15.05.2017	-0.0195	0.0519	-0.0016	-0.0151	0.0019	-0.0236	0.0082	0.0003	-0.0430	-0.0140
22.05.2017	0.0036	0.0320	0.0374	0.0275	0.0401	0.0345	0.0023	0.0136	0.0460	-0.0065
29.05.2017	0.0120	-0.0896	0.0110	0.0097	0.0043	0.0169	0.0106	0.1696	0.0452	0.0044

Vzor 40-tich nagenerovaných váh pre portfólio pozostávajúce z 10 aktív
Celkovo sme nagenerovali 20 000 váh

Skratka skúmanej spoločnosti										
Iterácia	TSLA	TWTR	NFLX	GOOG	AMZN	AAPL	FB	AMBA	PANW	NXPI
1	0.0608	0.0274	0.0845	0.0174	0.0212	0.0046	0.6021	0.0345	0.0002	0.1471
2	0.0001	0.0062	0.0006	0.0101	0.4087	0.0013	0.0199	0.0096	0.0587	0.4846
3	0.0002	0.5911	0.0001	0.0104	0.0000	0.0007	0.0551	0.0003	0.0009	0.3413
4	0.1495	0.3217	0.0001	0.5106	0.0010	0.0125	0.0004	0.0029	0.0006	0.0007
5	0.0000	0.0010	0.0009	0.0001	0.0697	0.0876	0.0000	0.0001	0.0149	0.8257
6	0.0012	0.0017	0.0008	0.0005	0.0001	0.9025	0.0621	0.0004	0.0001	0.0306
7	0.0007	0.0015	0.0000	0.0000	0.0006	0.0001	0.0003	0.7100	0.2321	0.0547
8	0.1038	0.0021	0.0062	0.0042	0.0496	0.0244	0.0436	0.2145	0.1684	0.3833
9	0.0000	0.0105	0.0000	0.1208	0.0086	0.0084	0.0000	0.8516	0.0000	0.0000
10	0.0001	0.4100	0.1230	0.0007	0.0084	0.0012	0.1158	0.3408	0.0000	0.0000
11	0.0049	0.0001	0.0055	0.0006	0.0007	0.0125	0.0001	0.5886	0.0199	0.3672
12	0.0076	0.3199	0.0907	0.0003	0.2497	0.0793	0.1704	0.0205	0.0612	0.0004
13	0.0000	0.0000	0.3067	0.0001	0.4725	0.2008	0.0000	0.0010	0.0000	0.0189
14	0.3575	0.0006	0.0000	0.0946	0.0000	0.1836	0.3453	0.0027	0.0000	0.0156
15	0.0052	0.5514	0.0001	0.0048	0.2481	0.0007	0.0018	0.0132	0.1464	0.0283
16	0.5839	0.0018	0.0033	0.0578	0.2835	0.0024	0.0285	0.0007	0.0123	0.0259
17	0.0001	0.0393	0.0038	0.0007	0.0004	0.3653	0.5601	0.0207	0.0094	0.0002
18	0.0077	0.0001	0.2624	0.0350	0.6748	0.0014	0.0001	0.0172	0.0000	0.0013
19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0016	0.0001	0.0001	0.0041	0.0006	0.9935
20	0.0000	0.7845	0.0038	0.0000	0.1997	0.0005	0.0000	0.0007	0.0009	0.0098
21	0.0007	0.0006	0.0248	0.0006	0.0010	0.0007	0.0017	0.7877	0.0009	0.1814
22	0.4994	0.0785	0.0827	0.3027	0.0036	0.0019	0.0029	0.0012	0.0223	0.0049
23	0.0070	0.4545	0.0093	0.0001	0.2704	0.0077	0.1716	0.0728	0.0058	0.0007
24	0.0353	0.0000	0.0001	0.0000	0.9593	0.0009	0.0000	0.0001	0.0043	0.0001
25	0.0134	0.0003	0.1488	0.0104	0.2006	0.0008	0.0100	0.0092	0.0019	0.6046
26	0.0199	0.0017	0.0000	0.6441	0.0187	0.0001	0.0511	0.0004	0.2640	0.0000
27	0.0017	0.0001	0.2785	0.0003	0.6758	0.0035	0.0070	0.0269	0.0002	0.0061
28	0.0437	0.0479	0.1793	0.0026	0.0001	0.0674	0.5954	0.0002	0.0003	0.0631
29	0.0008	0.0102	0.0002	0.0051	0.0280	0.2414	0.0014	0.0532	0.2519	0.4077
30	0.0722	0.0277	0.0247	0.0001	0.0679	0.0004	0.0015	0.2764	0.0022	0.5269
31	0.0032	0.0379	0.0300	0.0085	0.0351	0.5183	0.3342	0.0010	0.0002	0.0317
32	0.7816	0.0029	0.0048	0.0000	0.0236	0.1527	0.0009	0.0327	0.0001	0.0007
33	0.0002	0.0265	0.0015	0.0000	0.9526	0.0019	0.0005	0.0000	0.0067	0.0102
34	0.0080	0.0677	0.1524	0.0147	0.0013	0.1130	0.0966	0.3495	0.1955	0.0014
35	0.4306	0.0005	0.0034	0.0121	0.0656	0.0015	0.2335	0.0000	0.2527	0.0000
36	0.0001	0.0004	0.0817	0.0039	0.1971	0.0487	0.0003	0.5552	0.0001	0.1125
37	0.0001	0.0006	0.0072	0.0010	0.0001	0.0002	0.2543	0.0001	0.7072	0.0290
38	0.3382	0.0012	0.3386	0.0011	0.0526	0.1413	0.0020	0.0010	0.1241	0.0001
39	0.2147	0.0078	0.0294	0.0045	0.0764	0.0496	0.0144	0.2233	0.1526	0.2272
40	0.7423	0.0019	0.0008	0.0095	0.0004	0.0000	0.0000	0.0144	0.2262	0.0045

V študijnom informačnom systéme „SIS“ <https://is.cuni.cz/studium/> sú dodatočne nahraté zdrojové kódy, ktoré sme v numerickej časti využili v úlohe optimalizácie portfólia.